

Corrigé du test 2 du 23 avril 2009.
Algèbre linéaire II.

1. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel, et soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

- (a) Supposer que $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$. Montrer que si U est un sous-espace de V invariant sous L_1 , alors $L_2(U)$ est aussi invariant sous L_1 .

Soit $w \in L_2(U)$, alors il existe $u \in U$ tel que $L_2(u) = w$. On a donc

$$L_1(w) = L_1(L_2(u)) = (L_1 \circ L_2)(u) = (L_2 \circ L_1)(u) = L_2(L_1(u)).$$

Comme U est invariant sous L_1 , on a $L_1(u) \in U$, et donc

$$L_1(w) \in L_2(U).$$

On a montré : pour tout $w \in L_2(U)$, on a $L_1(w) \in L_2(U)$, ce qui veut dire que $L_2(U)$ est L_1 -invariant.

- (b) Supposer que $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$. Montrer que si $\lambda \in \text{Spec}(L_1)$, alors V_λ est invariant sous L_2 .

Soit $v \in V_\lambda$. On a

$$\begin{aligned} L_1(L_2(v)) &= (L_1 \circ L_2)(v) = (L_2 \circ L_1)(v) \\ &= L_2(L_1(v)) = L_2(\lambda v) = \lambda L_2(v), \end{aligned}$$

ce qui montre que $L_2(v) \in V_\lambda$. Par conséquent, le sous-espace V_λ est invariant sous L_2 .

- (c) Montrer que si $L_1 \circ L_2$ est nilpotent, alors $L_2 \circ L_1$ est aussi nilpotent. (**Rappel** : Un opérateur $L \in \mathcal{L}(V)$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $L^n = \mathbb{O}_{V,V}$, l'opérateur zéro.)

Puisque $L_1 \circ L_2$ est nilpotent, il existe $k \geq 1$ tel que $(L_1 \circ L_2)^k = \mathbb{O}_{V,V}$. Alors

$$(L_2 \circ L_1)^{k+1} \stackrel{(*)}{=} L_2 \circ (L_1 \circ L_2)^k \circ L_1 = L_2 \circ \mathbb{O}_{V,V} \circ L_1 = \mathbb{O}_{V,V}.$$

Donc $L_2 \circ L_1$ est nilpotent.

(*) Preuve que $L_2 \circ (L_1 \circ L_2)^k \circ L_1 = (L_2 \circ L_1)^{k+1}$ par récurrence : Pour $k = 1$, $L_2 \circ (L_1 \circ L_2) \circ L_1 = (L_2 \circ L_1) \circ (L_2 \circ L_1) = (L_2 \circ L_1)^2$. Supposons que l'hypothèse est vraie pour $k - 1$. Alors

$$\begin{aligned} L_2 \circ (L_1 \circ L_2)^k \circ L_1 &= L_2 \circ (L_1 \circ L_2)^{k-1} \circ (L_1 \circ L_2) \circ L_1 \\ &= (L_2 \circ (L_1 \circ L_2)^{k-1} \circ L_1) \circ (L_2 \circ L_1) \\ &= (L_2 \circ L_1)^k \circ (L_2 \circ L_1) = (L_2 \circ L_1)^{k+1}. \end{aligned}$$

2. (a) Soit $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ et $\mathcal{B}' = (2+5x, 3-7x)$ des bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivement. Soient $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}))$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$. Supposant que

$$[S]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

trouver une formule explicite pour le polynôme $T \circ S(p(x))$ pour tout $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, calculer $\text{Spec}(T \circ S)$ et trouver les espaces propres de $T \circ S$.

On a, d'après le cours,

$$[T \circ S]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot [S]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} [T \circ S]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$(T \circ S)(1) = 3, \quad (T \circ S)(1+x) = -9,$$

et

$$(T \circ S)(1+x+x^2) = 3(1+x) - 3(1+x+x^2) = -3x^2.$$

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un élément de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Alors $p(x)$ peut être écrit

$$p(x) = a \cdot (1+x+x^2) + (b-a) \cdot (1+x) + (c-b) \cdot 1.$$

On peut donc calculer

$$\begin{aligned} (T \circ S)(p(x)) &= a \cdot (T \circ S)(1+x+x^2) + (b-a) \cdot (T \circ S)(1+x) \\ &\quad + (c-b) \cdot (T \circ S)(1) \\ &= a \cdot (-3x^2) + (b-a) \cdot (-9) + (c-b) \cdot 3 \\ &= -3ax^2 - 12b + 9a + 3c. \end{aligned}$$

Comme la matrice de $T \circ S$ par rapport à la base \mathcal{B} est triangulaire supérieure, on sait d'après le cours que les valeurs propres de $T \circ S$ sont sur la diagonale de $[T \circ S]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$. On trouve donc

$$\text{Spec}(T \circ S) = \{3, 0, -3\}.$$

On a

$$V_3 = \ker((T \circ S) - 3 \text{Id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}), \quad V_0 = \ker(T \circ S)$$

et

$$V_{-3} = \ker((T \circ S) + 3 \text{Id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}).$$

On obtient donc $p(x) = ax^2 + bx + c \in V_3$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= (T \circ S)(p(x)) - 3p(x) \\ &= -3ax^2 - 12b + 9a + 3c - 3ax^2 - 3bx - 3c \\ &= -6ax^2 - 3bx + (9a - 12b), \end{aligned}$$

donc si et seulement si $a = b = 0$. Cela donne

$$V_3 = \text{span}(1).$$

De même, on a $p(x) = ax^2 + bx + c \in V_0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= (T \circ S)(p(x)) \\ &= -3ax^2 - 12b + 9a + 3c, \end{aligned}$$

donc si et seulement si $a = 0$ et $c = 4b$. Cela donne $p(x) = bx + 4b = b(x + 4)$, pour un $b \in \mathbb{R}$ quelconque, et donc

$$V_0 = \text{span}(x + 4).$$

Finalement, $p(x) = ax^2 + bx + c \in V_{-3}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= (T \circ S)(p(x)) + 3p(x) \\ &= -3ax^2 - 12b + 9a + 3c + 3ax^2 + 3bx + 3c \\ &= 3bx + (9a - 12b + 6c), \end{aligned}$$

donc si et seulement si $b = 0$ et $3a = -2c$. On obtient donc

$$V_{-3} = \text{span}(2x^2 - 3).$$

(b) Soient

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Soit $W = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$. Trouver le vecteur \vec{w} de W qui minimise $\|\vec{b} - \vec{w}\|_{\text{euclid}}$.

Le vecteur \vec{b} est un élément de W , donc le vecteur qui minimise $\|\vec{b} - \vec{w}\|_{\text{euclid}}$, $\vec{w} \in W$ est \vec{b} lui-même !

Pour ceux qui ne l'ont pas vu :

Comme $\vec{w}_3 = \vec{w}_1 - \vec{w}_2$, on a $W = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$.

Les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 étant linéairement indépendants, ils forment donc une base de W . Le produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^4 est donné par

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot y_i$$

si

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

On obtient donc

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0,$$

et par conséquent, il suffit de normer ces deux vecteurs pour obtenir une base orthonormée de W . On a $\|\vec{w}_1\|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 = 2$ et $\|\vec{w}_2\|^2 = 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$, et on obtient la base orthonormée

$$\left(\vec{u}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

de W .

D'après le cours, on sait que le vecteur cherché \vec{w} est égal au

projeté orthogonal $\text{proj}_W(\vec{b})$ de \vec{b} sur W . On calcule donc

$$\begin{aligned}\text{proj}_W(\vec{b}) &= \langle \vec{b}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{b}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Autre méthode possible : on utilise la méthode des moindres carrés. Soit A la matrice $[\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$. L'application $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ayant la matrice A dans la base canonique a donc pour image le sous-espace vectoriel W de \mathbb{R}^4 . Comme \mathbb{R}^4 est muni du produit scalaire euclidien, on a d'après le cours : si $v \in \mathbb{R}^3$ est une solution du problème $(A^t A)v = A^t \vec{b}$, alors $Av = \text{proj}_W(\vec{b})$ et Av est par conséquent le vecteur de W qui minimise la distance $\|b - w\|_{\text{euclid}}$, $w \in W$.

On calcule donc

$$\begin{aligned}A^t A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

et

$$A^t \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve que les solutions du système $A^t Av = A^t \vec{b}$ sont de la forme $(-1, -1, 0) + t(-1, 1, 1)$ avec $t \in \mathbb{R}$. On choisit la solution $v = (-1, -1, 0)$. On a alors

$$\vec{w} = Av = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Noter qu'on a bien

$$A \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

3. Indiquer la bonne réponse par une croix, et ensuite justifier votre réponse.

- (a) Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel, et soit $T \in \mathcal{L}(V)$. S'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de V telle que

$$T(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \vec{v}_i$$

pour tout $1 \leq k \leq n$, est-ce que T est diagonalisable ?

La réponse est OUI. Justification : La matrice $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ de T dans la base \mathcal{B} est dans ce cas égale à

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} &= ([T(v_1)]_{\mathcal{B}}, \dots, [T(v_n)]_{\mathcal{B}}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure. D'après le cours, les valeurs propres de T peuvent donc être lues sur la diagonale de $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$. On obtient $\text{Spec}(T) = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}\}$. L'opérateur T a donc n valeurs propres différentes. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on choisit un vecteur non nul $\vec{u}_i \in V_{\frac{1}{i}}$. On sait d'après le cours que les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ étant des vecteurs propres pour des valeurs propres différentes, ils sont linéairement indépendants. Par conséquent, comme la dimension de V est égale à n , la liste $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de V . Comme on a de plus $T(\vec{u}_i) = \frac{1}{i} \vec{u}_i$, la matrice de T dans la base $\mathcal{C} := (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est donc $[T]_{\mathcal{C}} = \text{diag}(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n})$.

(b) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5(\mathbb{R}))$. Si $\deg T(p(x)) \leq 3$ pour tout $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ et

$$\int_0^1 (p(x) - T(p(x)))^2 dx < \int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx$$

pour tout $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \setminus \{T(p(x))\}$ et tout $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, est-il possible que $-1 \in \text{Spec}(T)$?

La réponse est NON. Justification : admettons qu'il existe $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $T(p(x)) = -p(x)$. On aurait alors $\deg p(x) = \deg T(p(x)) \leq 3$ et pour tout $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \setminus \{T(p(x))\}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (p(x) - T(p(x)))^2 dx < \int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx \\ \Leftrightarrow & \int_0^1 (2p(x))^2 dx < \int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx \\ \Leftrightarrow & 4 \int_0^1 (p(x))^2 dx < \int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx. \end{aligned}$$

En particulier, comme $p(x) \neq 0$, on aurait $T(p(x)) = -p(x) \neq 0$ et donc $0 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \setminus \{T(p(x))\}$. Mais l'inégalité ci-dessus appliquée à $q(x) = 0$ donne

$$4 \int_0^1 (p(x))^2 dx < \int_0^1 (p(x))^2 dx.$$

Mais ceci n'est pas possible puisque l'intégrale $\int_0^1 p(x)^2 dx$ est supérieure à 0.

Autre justification : on remarque que si $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire défini par $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ pour tout $p, q \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, la condition donnée dans l'énoncé est :

$$\|p(x) - T(p(x))\|^2 < \|p(x) - q(x)\|^2$$

pour tout $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \setminus \{T(p(x))\}$ et tout $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, où $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ associée à ce produit scalaire.

Pour tout $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, $T(p(x))$ est donc l'élément de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (vu comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$) qui minimise la norme $\|p(x) - q(x)\|$, $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. D'après le cours, $T(p(x))$ est donc le projeté orthogonal de $p(x)$ sur $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5(\mathbb{R}))$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Mais en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $:= (1, x, x^2, x^3, x^4, x^5)$, on obtient une base orthonormée $\mathcal{C} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ de $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ telle que $\deg p_i = i$ pour $i = 0, \dots, 5$. La liste $\mathcal{C}' = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ est donc une base orthonormée de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. La matrice $[T]_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}$ de T dans cette base est donc $\text{diag}(1, 1, 1, 1, 0, 0)$, et on trouve $\text{Spec}(T) = \{0, 1\}$.

Une dernière façon de justifier la réponse : on montre de même que T est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. S'il existe $0 \neq p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ tel que $T(p(x)) = -p(x)$, alors $\deg p(x) \leq 3$. La projection de $p(x)$ sur $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ est alors $p(x)$ même, et donc $T(p(x)) = p(x)$. Ceci est une contradiction car $p(x) \neq 0$.

(c) Soient $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Est-il vrai que

$$\begin{aligned} & (5p(0)q(0) + 3p'(0)q'(0) + 17p''(0)q''(0))^2 \\ & \leq (5p(0)^2 + 3p'(0)^2 + 17p''(0)^2)(5q(0)^2 + 3q'(0)^2 + 17q''(0)^2)? \end{aligned}$$

La réponse est OUI. Justification : On définit la forme

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$\phi(p(x), q(x)) = 5p(0)q(0) + 3p'(0)q'(0) + 17p''(0)q''(0)$$

pour tout $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. On vérifie que ϕ est un produit scalaire sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. La forme ϕ est symétrique : pour tout $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \phi(p(x), q(x)) &= 5p(0)q(0) + 3p'(0)q'(0) + 17p''(0)q''(0) \\ &= 5q(0)p(0) + 3q'(0)p'(0) + 17q''(0)p''(0) = \phi(q(x), p(x)) \end{aligned}$$

par commutativité de la multiplication dans \mathbb{R} .

La forme est linéaire dans le premier argument : Soient $p(x), q(x), r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} & \phi(\alpha p(x) + \beta r(x), q(x)) = \phi((\alpha p + \beta r)(x), q(x)) \\ &= 5(\alpha p + \beta r)(0)q(0) + 3(\alpha p + \beta r)'(0)q'(0) + 17(\alpha p + \beta r)''(0)q''(0) \\ &= 5(\alpha p(0) + \beta r(0))q(0) + 3(\alpha p'(0) + \beta r'(0))q'(0) \\ & \quad + 17(\alpha p''(0) + \beta r''(0))q''(0) \\ &= 5\alpha p(0)q(0) + 5\beta r(0)q(0) + 3\alpha p'(0)q'(0) + 3\beta r'(0)q'(0) \\ & \quad + 17\alpha p''(0)q''(0) + 17\beta r''(0)q''(0) \\ &= \alpha\phi(p(x), q(x)) + \beta\phi(r(x), q(x)). \end{aligned}$$

Par symétrie, la forme ϕ est donc aussi linéaire dans le second argument.

Il reste à montrer que ϕ est définie positive. On a

$$\phi(p(x), p(x)) = 5(p(0))^2 + 3(p'(0))^2 + 17(p''(0))^2 \geq 0$$

pour tout $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, et

$$\begin{aligned}\phi(p(x), p(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5(p(0))^2 + 3(p'(0))^2 + 17(p''(0))^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p(0))^2 = (p'(0))^2 = (p''(0))^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p(0) = p'(0) = p''(0) &= 0.\end{aligned}$$

Mais comme $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, le polynôme peut être écrit $p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a dans ce cas $p'(x) = 2ax + b$ et $p''(x) = 2a$. Cela donne $p(0) = c$, $p'(0) = b$ et $p''(0) = 2a$. Donc si $\phi(p(x), p(x)) = 0$, on a $a = b = c = 0$ d'après les équivalences ci-dessus, et donc $p(x) = 0$. La forme ϕ est donc définie positive. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc valable pour $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire ϕ : pour tout $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ on a

$$|\phi(p, q)| \leq \|p\| \cdot \|q\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ définie par le produit scalaire ϕ , c'est-à-dire $\|p\|^2 = \phi(p, p)$. En mettant les deux côtés de cette inégalité au carré, on obtient

$$\phi(p, q)^2 \leq \phi(p, p) \cdot \phi(q, q),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}(5p(0)q(0) + 3p'(0)q'(0) + 17p''(0)q''(0))^2 \\ \leq (5p(0)^2 + 3p'(0)^2 + 17p''(0)^2) \\ \cdot (5q(0)^2 + 3q'(0)^2 + 17q''(0)^2),\end{aligned}$$

l'inégalité qui était à démontrer.

4. Ci-dessous V et W sont des \mathbb{F} -espaces vectoriels, où la notation \mathbb{F} veut dire soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} .

(a) Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$.

Le noyau de T est le sous-ensemble

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V.$$

L'image de T est le sous-ensemble

$$\text{Im}(T) := \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tel que } T(v) = w\} \subseteq W.$$

(b) Montrer que le noyau et l'image d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$ sont des sous-espaces de V et de W , respectivement.

Pour montrer qu'un sous-ensemble $U \subseteq W$ est un sous-espace vectoriel, on doit montrer que

- $U \neq \emptyset$,
- pour tout $u_1, u_2 \in U$ on a $u_1 + u_2 \in U$, et
- pour tout $\alpha \in \mathbb{F}$ et $u \in U$ on a $\alpha u \in U$.

On commence par montrer que $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V . Comme $T(0) = 0$, on a $0 \in \ker(T)$ et donc $\ker(T) \neq \emptyset$. Soient $u_1, u_2 \in \ker(T)$. On a alors $T(u_1) = T(u_2) = 0$ et donc par additivité de $T : T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0$. On a donc $u_1 + u_2 \in \ker(T)$. Soient maintenant $\alpha \in \mathbb{F}$ et $u \in \ker(T)$, c'est à dire $u \in V$ tel que $T(u) = 0$. On a alors, par homogénéité de $T : T(\alpha u) = \alpha T(u) = 0$, donc $\alpha u \in \ker(T)$.

On montre maintenant que $\text{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W . Comme $T(0) = 0$, on a $0 \in \text{Im}(T)$ et donc $\text{Im}(T) \neq \emptyset$. Soient $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$. Il existe alors v_1 et $v_2 \in V$ tels que $T(v_i) = w_i$, $i = 1, 2$, et donc par additivité de $T : w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in \text{Im}(T)$. Soient maintenant $\alpha \in \mathbb{F}$ et $w \in \text{Im}(T)$, c'est à dire qu'il existe $v \in V$ tel que $T(v) = w$. On a alors, par homogénéité de $T : \alpha w = \alpha T(v) = T(\alpha v) \in \text{Im}(T)$.

(c) Énoncer le Théorème du Rang.

Soient V et W des \mathbb{F} -espaces vectoriels avec $\dim V < \infty$. Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Alors, on a

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)).$$

(d) Qu'est-ce qu'un isomorphisme ?

Un isomorphisme est une application linéaire bijective d'un F -espace vectoriel V dans un F -espace vectoriel W .

(e) Supposer que $\dim V = \dim W < \infty$, et soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Montrer l'équivalence des trois énoncés suivants.

- i. T est un isomorphisme.
- ii. T est une injection.
- iii. T est une surjection.

“i. \Rightarrow ii.” : Si T est un isomorphisme, alors T est une bijection, donc une injection.

“ii. \Rightarrow iii.” : D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\operatorname{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V).$$

Comme T est une injection, son noyau ne peut contenir que l'élément nul, donc on a $\ker(T) = \{0\}$ et par conséquent $\dim(\ker(T)) = 0$. Cela implique $\dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim V$. On a vu dans la question précédente que $\operatorname{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W . D'après l'énoncé, on a $\dim W = \dim V$. On obtient donc que $\operatorname{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W avec $\dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim W$. D'après le cours, une base de $\operatorname{Im}(T)$ est donc automatiquement une base de W , donc $W = \operatorname{Im}(T)$ et T est surjective.

“iii. \Rightarrow i.” : Si T est une surjection, $\operatorname{Im}(T) = W$ et donc $\dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim W$. Comme $\dim W = \dim V$, on obtient à l'aide du théorème du rang :

$$\dim(\ker(T)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}(T)) = 0.$$

Donc on a $\ker(T) = 0$, ce qui est équivalent à l'injectivité de T (s'il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $T(v_1) = T(v_2)$, alors $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = 0$ et donc $v_1 - v_2 \in \ker(T) = \{0\}$). Donc T est injective et surjective et donc un isomorphisme.

(f) Montrer que si V et W sont de dimension finie, alors ils sont isomorphes si et seulement si $\dim V = \dim W$.

“ \Rightarrow ” Si V et W sont isomorphes, alors il existe un isomorphisme $L : V \rightarrow W$. Comme L est injectif et surjectif, on a $\ker(L) = \{0\}$ et $\text{Im}(L) = W$. Le théorème du rang donne alors

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \text{Im}(L) = 0 + \dim W = \dim W.$$

“ \Leftarrow ” Soit $\dim W = \dim V =: n$ et soient $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_n)$ des bases de V et W , respectivement. On définit $L : V \rightarrow W$ par $L(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ si $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Comme \mathcal{B}_V est une base de V , chaque élément de V peut être exprimé de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B}_V , et l'application L est donc bien définie.

On montre que L est linéaire. Soient $v, v' \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, alors $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ et $v' = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ avec $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$. Cela implique $\alpha v + \beta v' = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) v_i$, et donc

$$\begin{aligned} L(\alpha v + \beta v') &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) w_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i w_i + \beta \sum_{i=1}^n b_i w_i = \alpha L(v) + \beta L(v'). \end{aligned}$$

(L est par construction l'unique application linéaire étendant l'application $l : \mathcal{B}_V \rightarrow \mathcal{B}_W$, $l(v_i) = w_i$, voir les exercices.)

On montre maintenant que L est un isomorphisme. Soit $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$. On a $L(v) = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n a_i w_i = 0$ et donc si et seulement si $a_1 = \dots = a_n = 0$ car \mathcal{B}_W est une base de W . Donc $L(v) = 0$ si et seulement si $v = 0$, et L est injective. Soit $w = \sum_{i=1}^n a_i w_i \in W$. Alors, par définition de L , $w = L(\sum_{i=1}^n a_i v_i)$. Donc $w \in \text{Im}(L)$, et L est surjective.

Remarque : on peut aussi montrer (comme dans le cours) que si $\dim V = n$, alors V est isomorphe à \mathbb{F}^n . On a alors : $\dim V = \dim W = n$ implique $V \simeq \mathbb{F}^n$ et $W \simeq \mathbb{F}^n$, donc $V \simeq W$.

(g) Est-ce que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(V)$ est forcément un isomorphisme? Justifier votre réponse.

L'application $L : V \rightarrow V$, $L : v \mapsto 0$ est un endomorphisme de V , mais jamais surjective si $V \neq \{0\}$. La réponse est donc non si $V \neq \{0\}$.

Si $V = \{0\}$, alors le seul endomorphisme de V est l'identité $0 \mapsto 0$. Donc dans ce cas, tout endomorphisme de V est un isomorphisme!