École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire I, II
Professeur K. Hess Bellwald
Sections de mathématiques et de physique

EXAMEN PROPÉDEUTIQUE D'ALGÈBRE LINÉAIRE
du 16 juin 2008
8h15 à 12h00

NOM : ____________________

PRÉNOM : ____________________

SECTION : ____________________

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil éléctronique n'est permis. Ne pas dégrafer le cahier. Utiliser les feuilles de couleur comme brouillons. Tous les calculs et raisonnements doivent figurer dans le dossier rendu.

Vous pouvez utiliser les formules du cours pour les dimensions de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, $\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{F})$, $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ et $\mathcal{L}(V,W)$ sans justification.

EXERCICE	VALEUR	POINTS
1	/14	
2	/13	
3	/18	
4	/25	
5	/30	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

Bon travail et bonne chance !

1. Soient X un ensemble et V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Pour tout sous-espace U de V, soit

$$\widehat{U} = \{f \in \mathcal{F}(X, V) \mid \operatorname{Im}(f) \subset U\}.$$

[5] (a) Montrer que $\widehat{U}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(X, V)$.

(b) Soient U et W des sous-espaces de V. Montrer que

$$\widehat{U} + \widehat{W} = \widehat{U + W}.$$

[4]

(c) Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur U et W pour
[5] que la somme $\widehat{U} + \widehat{W}$ soit directe. Justifier votre réponse.

2. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie et muni d'un produit scalaire, et soit $T \in \mathcal{L}(V)$.

   (a) Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et T est normal, montrer que T est auto-adjoint si et seulement si toutes ses valeurs propres sont réelles. (Il ne suffit
[8] pas seulement de citer une proposition du cours !)

(b) Montrer que si $T^*T = -T$, alors T est auto-adjoint et

$$\operatorname{Spec} T \subset \{-1, 0\}.$$

[5]

3. Supposons que nous avons construit un bras de robot, muni d'une pince à un bout. Supposons que l'ensemble des positions possibles de la pince dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est égal à $\ker A$, où

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -15 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

[18] Si nous voulons atteindre un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, quel est le point de $\mathbb{R}^3$ le plus près de (x, y, z) (en termes de la norme euclidienne) qui est physiquement réalisable comme position de la pince ? Justifier votre réponse.

3. (cont.)

4. Indiquer la bonne réponse par une croix, et ensuite justifier votre réponse.

   (a) Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ une application. S'il existe $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ tels que $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ et que

   $$\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_1) + \varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 2\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$$

   est-ce que φ peut être un produit scalaire ?

[1] Oui ☐ Non ☐

[4] Justification :

   (b) Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit T un opérateur linéaire inversible sur V. S'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de V telles que

   $$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'},$$

   est-il vrai que

   $$\operatorname{Spec} T \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \neq \emptyset$$

   si et seulement si

   $$\operatorname{Spec} T \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > 1\} \neq \emptyset ?$$

[1] Oui ☐ Non ☐

[4] Justification :

4. (c) Soit $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$. Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ la base standard de $\mathbb{C}^n$. Si

$$< A\vec{e}_i, A\vec{e}_j >_{\text{euclid}} = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j, \end{cases}$$

est-il possible que $|\det A| < 1$?

[1] Oui ☐ Non ☐

[4] Justification :

(d) Soit $T \in \mathcal{L}\big(\mathcal{P}_2(\mathbb{C})\big)$. Est-il possible qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad [T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ?$$

[1] Oui ☐ Non ☐

[4] Justification :

4. (e) Soit $A \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{C})$. Si

$$\det(A - 5I_3) = \det(A - 3I_3) = \det(A + 4I_3) = 0,$$

est-ce que A est inversible ?

[1] Oui ☐ Non ☐

[4] Justification :

5. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$.

[5] (a) Comment définit-on le polynôme caractéristique $c_T(x)$ de T ? Expliquer toutes les notions du cours dont on a besoin dans cette définition (autres que les notions d'espace vectoriel, de dimension et d'opérateur linéaire).

[2] (b) Donner une formule pour $c_T(x)$ en termes du déterminant.

[2] (c) Enoncer le Théorème de Cayley-Hamilton.

5. (d) Qu'est-ce qu'un polynôme minimal de T ? Montrer que tout opérateur
[5] complexe admet un unique polynôme minimal.

(e) Montrer que si $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, alors

$$p(T) = \mathbb{O}_V \Longleftrightarrow q_T(x) | p(x),$$

[8] où $q_T(x)$ est le polynôme minimal de T.

5. (f) Donner un exemple d'un opérateur T tel que $q_T(x) \neq c_T(x)$.
[4] Calculer $q_T(x)$ et de $c_T(x)$ dans ce cas, et justifier vos calculs.

(g) Démontrer que toute racine de $q_T(x)$ est une valeur propre de T.
[4]