

Série 9

L'exercice 1 peut être rendu le 24 novembre au début de la séance d'exercices.

Dans cette série, \mathbb{F} est l'ensemble des nombres réels ou l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 1 Soit $U \subseteq \mathbb{F}^5$ le sous-espace vectoriel défini par

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{F}^5 \mid x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = 2x_4 = 3x_5\}.$$

Existe-t-il une application linéaire $T : \mathbb{F}^5 \rightarrow \mathbb{F}^2$ telle que $\ker T = U$?

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un opérateur $T : E \rightarrow E$ tel que $\text{Ker}(T) = F$ et $\text{Im}(T) = G$?

Exercice 3 Soit $t \in \mathcal{F}(\{(1, 0), (0, 1)\}, \mathbb{R}^2)$ l'application définie par $t(1, 0) = (1, 1)$ et $t(0, 1) = (1, 2)$. Trouver $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'unique extension linéaire de t , soit donnée par $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Exercice 4 Soit \mathcal{B}_n la base canonique/standard de \mathbb{F}^n , avec $n \geq 1$.

(a) Soit $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Définir de manière "naturelle" (penser à la proposition 4.7 du polycopié de F. Margairaz) une application

$$F = F_{n,m} : \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m),$$

(où $\mathcal{F}(E_n, E_m)$ est l'ensemble des applications qui vont de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m).

(b) Soit $n, m, l \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m)$ et $g \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_l)$. Vérifier que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

(c) Soit $n \geq 1$. Vérifier que $F(\text{Id}) = \text{Id}$, où $\text{Id} : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ est l'application identité.

Exercice 5 Soit $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Et soit V et W des espaces vectoriels sur \mathbb{F} . Finalement, soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, et $h \in \mathcal{L}(V, W)$.

(a) Définir de manière "naturelle" une application $\alpha_{f,h} : \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, W)$, et montrer que cette application est linéaire.

(b) Définir de manière "naturelle" une application $\beta_{f,h} : \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, V) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, W)$ et montrer que cette application est linéaire.

Exercice 6 Soit $n, m \geq 1$, et soit V , et W des espaces vectoriels sur \mathbb{F} . Finalement, soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m)$, et $g \in \mathcal{L}(V, W)$.

Montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V) & \xrightarrow{G_{m,V}} & \mathcal{L}(\mathcal{F}^m, V) \\ \downarrow \alpha_{f,g} & & \downarrow \beta_{F(f),g} \\ \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, W) & \xrightarrow{G_{n,W}} & \mathcal{L}(\mathcal{F}^n, W). \end{array}$$

Autrement dit, il faut montrer que $\beta_{F(f),g} G_{m,V} = G_{n,W} \alpha_{f,g}$, où $G_{m,V} : \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}^m, V)$ est l'application "d'extension" donnée dans la proposition 4.7 du polycopié de F. Margairaz (la définition de $G_{n,W}$ est analogue).