EPFL Algèbre linéaire
1ère année
2008-2009

Série 28

Exercice 1.

1. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$. Montrer qu'il n'existe pas d'opérateurs $S, T \in \mathcal{L}(V)$ tels que
$$S \circ T - T \circ S = \mathrm{Id}_V\,.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{F})$. Montrer que si pour toute matrice X de $\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{F})$ on a $\mathrm{Tr}\,(AX) = \mathrm{Tr}\,(BX)$, alors $A = B$.
3. Supposons que V est muni d'un produit scalaire et que $v, w \in V$. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$ défini par $Tu = \langle u, v\rangle w$. Calculer la trace de T.
4. Trouver un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V et $T \in \mathcal{L}(V)$ tels que $\mathrm{Tr}\,(T^2) < 0$.
5. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $T \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que si V a une base de vecteurs propres de T, alors $\mathrm{Tr}\,(T^2) \geq 0$.

Exercice 2. Trouver $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ tel que

1. $c_T(z) = q_T(z) = z(z-1)^2(z-3)$;
2. $c_T(z) = z(z-1)^2(z-3)$ et $q_T(z) = z(z-1)(z-3)$.

Exercice 3. Supposons que $T \in \mathcal{L}(V)$ est tel que $T^2 = -\mathrm{Id}_V$.

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas $\dim(V) = 2$ ou 4.
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si $\dim(V)$ est pair.

Exercice 4. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $T \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que

1. $\det \mathrm{Id}_V = 1$,
2. $\det T \neq 0$ si et seulement si T est inversible,
3. si T est inversible, alors $\det T^{-1} = (\det T)^{-1}$,
4. $\det \alpha T = \alpha^n \det T$.
5. On admet que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ pour $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{F})$. Montrer que $\det(T_1 \circ T_2) = \det T_1 \cdot \det T_2$ pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$.