

Série 4

L'exercice 3 est à rendre le 20 octobre au début de la séance d'exercices.

Dans cette série, le symbole \mathbb{F} désigne soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} .

- Exercice 1.**
1. Donner, dans \mathbb{F}^3 , un exemple de liste de vecteurs linéairement indépendants qui n'est pas une liste génératrice.
 2. Donner, dans \mathbb{F}^3 , un exemple de liste de vecteurs générateurs qui n'est pas une liste de vecteurs linéairement indépendants.
 3. Trouver, en utilisant la méthode donnée par le Lemme du vecteur superflu, une sous-liste linéairement indépendante de la liste

$$((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 3, 0), (-2, 1, 0, 0))$$

qui engendre le même sous-espace vectoriel U de \mathbb{F}^4 . En utilisant le Théorème de la borne, trouver une borne inférieure pour le nombre d'éléments d'une liste génératrice de U .

4. Trouver une liste génératrice pour le sous-espace

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 \mid x_1 = 2x_2 \text{ et } x_3 = x_1 + x_2\}$$

de \mathbb{F}^3 .

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{F}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \mathbb{F})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, dans \mathbb{F} . Montrer que E est de dimension finie. Trouver même une liste de vecteurs de E qui soit, à la fois, une liste génératrice de E et linéairement indépendante. En déduire, à l'aide du Théorème de la borne, combien d'éléments une liste génératrice de E doit au moins avoir.

Exercice 3. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel et $u, v, w \in V$ linéairement indépendants.

1. Montrer que les vecteurs $u + v - 2w$, $u - v - w$, $u + w$ sont linéairement indépendants.
2. Soit $z \in V$. Montrer que si la liste $(u + z, v + z, w + z)$ est linéairement *dépendante*, alors $z \in \text{span}(u, v, w)$. Cette condition est-elle nécessaire pour que $z \in \text{span}(u, v, w)$?

Exercice 4. Soit V le \mathbb{R} -espace vectoriel $V = \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que les fonctions $f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$, und $f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^x$, sont des éléments linéairement indépendants de V .
2. Pour $a \in [0, 1]$ on définit $g_a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_a(a) = 1$, et $g_a(x) = 0$ si $x \neq a$.
Montrer que : L'ensemble $M := \{g_a \mid a \in [0, 1]\} \subset V$ est linéairement indépendant, c'est à dire que chaque sous-ensemble fini de M est linéairement indépendant. En déduire que V est de dimension infinie.
(Indication : pour cela, on peut utiliser le corollaire du Théorème de la borne et le fait que $M \subseteq V$.)
3. Montrer que : $\text{span}(M)$ est l'ensemble de tous les éléments $f \in V$, pour lesquels l'ensemble $\{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\}$ est fini.

Exercice 5. Montrer qu'il existe une famille \mathcal{F} contenant mille vecteurs de \mathbb{F}^3 telle que chaque sous-ensemble de \mathcal{F} composé de trois éléments au plus est linéairement indépendant.

Indication : considérer $\mathcal{F} := \{(1, x, x^2) \mid x \in \{1, \dots, 1000\}\} \dots$