École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire I, II
Professeur K. Hess Bellwald
Sections de mathématiques et de physique

TRAVAIL ECRIT D'ALGÈBRE LINÉAIRE
du 14 novembre 2008
9h15 à 11h

NOM : ____________________

PRÉNOM : ____________________

SECTION : ____________________

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil éléctronique n'est permis. Ne pas dégrafer le cahier. Utiliser les feuilles de couleur comme brouillons. Tous les calculs et raisonnements doivent figurer dans le dossier rendu.

EXERCICE	VALEUR	POINTS
1	/18	
2	/25	
3	/30	
4	/27	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

Bon travail et bonne chance !

1. Soient V et W deux $\mathbb{F}$-espaces vectoriels.
   (a) Définir une structure de $\mathbb{F}$-espace vectoriel sur $V \times W$, provenant de celles de V et de W. (Vous n'êtes pas obligé de vérifier tous les axiomes, mais de dire et justifier quel est le zéro et comment
[8] former les inverses additifs.)

   (b) Montrer que si V et W sont de dimension finie, alors $V \times W$ l'est
[10] également et $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

2. Soient $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $Y = \{y_1, y_2\}$. Soit $V = \mathcal{F}(X \times Y, \mathbb{F})$

   [10] (a) Trouver une base de V et calculer $\dim V$. Justifier votre réponse.

[5] (b) Soit $U = \{f \in V \mid f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_2)\}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de V.

[10] (c) Trouver un sous-espace W de V tel que $U \oplus W = V$. Justifier votre réponse.

3. Indiquer la bonne réponse par une croix, et ensuite justifier votre réponse.

   (a) Soient $q_1(x), q_2(x), ..., q_7(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \smallsetminus \{0\}$. Si

   $$\operatorname{span}\big(q_1(x), ..., q_7(x)\big) = \operatorname{span}\big(q_1(x)\big) \oplus \cdots \oplus \operatorname{span}\big(q_7(x)\big),$$

   est-il possible que $n = 5$?

[2] Oui ☐ Non ☐

[8] Justification :

   (b) Soient V et W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soient S et T des applications linéaires de V vers W, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Est-ce que l'application

   $$\alpha \cdot S + \beta \cdot T : V \to W$$

   est linéaire ? (Ici, la somme de deux applications et la multiplication d'une application par un scalaire sont définies comme d'habitude.)

[2] Oui ☐ Non ☐

[8] Justification :

(c) Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit U_n un sous-espace vectoriel de V. Supposer que

$$U_{n_1} + \cdots + U_{n_k} = U_{n_1} \oplus \cdots \oplus U_{n_k}$$

quelques soient $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ et quelque soit k. Est-il possible que $U_m \neq U_n$ chaque fois que $m \neq n$, i.e., que tous les U_n soient distincts ?

[2] Oui ☐ Non ☐

[8] Justification :

4. Ci-dessous la notation $\mathbb{F}$ veut dire soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

[10] (a) Donner la définition complète d'un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

(b) Montrer que $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni de deux opérations

$$\mathrm{add} : V \times V \to V : (f, g) \mapsto g \circ f$$

et

$$\mathrm{mult} : \mathbb{R} \times V \to V : (\alpha, f) \mapsto \alpha \cdot f,$$

où $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot \big(f(x)\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, n'est pas un $\mathbb{R}$-espace
[3] vectoriel.

(c) Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{F}$ et $\vec{v} \in V$, alors

$$\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0} \text{ si et seulement si } \alpha = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}.$$

Justifier chaque pas de votre argument en faisant appel aux axiomes
[5] d'espace vectoriel.

[4] (d) Montrer que si V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel tel que $V \neq \{\vec{0}\}$, alors V contient un nombre infini de vecteurs distincts.

[5] (e) Donner un exemple d'un $\mathbb{F}$-espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Justifier votre réponse.