

École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire I, II
Professeur K. Hess Bellwald
Sections de mathématiques et de physique

TRAVAIL ECRIT D'ALGÈBRE LINÉAIRE
du 23 avril 2009
11h15 à 13h

NOM : _____

PRÉNOM : _____

SECTION : _____

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique n'est permis. Ne pas dégrafer le cahier. Utiliser les feuilles de couleur comme brouillons. Tous les calculs et raisonnements doivent figurer dans le dossier rendu.

EXERCICE	VALEUR	POINTS
1	/15	
2	/25	
3	/30	
4	/30	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

Bon travail et bonne chance!

1. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel, et soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

(a) Supposer que $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$. Montrer que si U est un sous-espace de V invariant sous L_1 , alors $L_2(U)$ est aussi invariant sous L_1 .

[4]

(b) Supposer que $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$. Montrer que si $\lambda \in \text{Spec}(L_1)$, alors V_λ est invariant sous L_2 .

[5]

(c) Montrer que si $L_1 \circ L_2$ est nilpotent, alors $L_2 \circ L_1$ est aussi nilpotent. (**Rappel** : Un opérateur $L \in \mathcal{L}(V)$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $L^n = \mathbb{O}_{V,V}$, l'opérateur zéro.)

[6]

2. (a) Soit $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ et $\mathcal{B}' = (2+5x, 3-7x)$ des bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivement. Soient $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}))$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$. Supposant que

$$[S]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

trouver une formule explicite pour le polynôme $T \circ S(p(x))$ pour tout $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, calculer $\text{Spec}(T \circ S)$ et trouver les espaces propres de $T \circ S$.

[15]

(b) Soient

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Soit $W = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$. Trouver le vecteur \vec{w} de W qui minimise $\|\vec{b} - \vec{w}\|_{\text{euclid}}$.

[10]

3. Indiquer la bonne réponse par une croix, et ensuite justifier votre réponse.

(a) Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel, et soit $T \in \mathcal{L}(V)$. S'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de V telle que

$$T(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \vec{v}_i$$

pour tout $1 \leq k \leq n$, est-ce que T est diagonalisable ?

[2]

Oui Non

[8]

Justification :

(b) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5(\mathbb{R}))$. Si $\deg T(p(x)) \leq 3$ pour tout $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ et

$$\int_0^1 (p(x) - T(p(x)))^2 dx < \int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx$$

pour tout $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \setminus \{T(p(x))\}$ et tout $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, est-il possible que $-1 \in \text{Spec}(T)$?

[2]

Oui Non

[8]

Justification :

(c) Soient $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Est-il vrai que

$$\begin{aligned} & (5p(0)q(0) + 3p'(0)q'(0) + 17p''(0)q''(0))^2 \\ & \leq (5p(0)^2 + 3p'(0)^2 + 17p''(0)^2)(5q(0)^2 + 3q'(0)^2 + 17q''(0)^2)? \end{aligned}$$

[2]

Oui Non

[8]

Justification :

4. Ci-dessous V et W sont des \mathbb{F} -espaces vectoriels, où la notation \mathbb{F} veut dire soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} .

[4] (a) Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$.

[6] (b) Montrer que le noyau et l'image d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$ sont des sous-espaces de V et de W , respectivement.

- [2] (c) Énoncer le Théorème du Rang.
- [2] (d) Qu'est-ce qu'un isomorphisme ?
- (e) Supposer que $\dim V = \dim W < \infty$, et soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Montrer l'équivalence des trois énoncés suivants.
- i. T est un isomorphisme.
 - ii. T est une injection.
 - iii. T est une surjection.
- [6]

- [8] (f) Montrer que si V et W sont de dimension finie, alors ils sont isomorphes si et seulement si $\dim V = \dim W$.

- [2] (g) Est-ce que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(V)$ est forcément un isomorphisme? Justifier votre réponse.