EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2008-2009

Corrigé de la série 13

On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de permutation (notée $I_{i,j}$ en cours) ;
$D_{i,\lambda}$ la matrice élémentaire de dilatation (notée $II_{i,\lambda}$ en cours) ;
et $T_{i,j,\lambda}$ la matrice élémentaire de transvection (notée $III_{i,j,\lambda}$ en cours).

Correction exercice 1

On utilise l'algorithme de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse de la matrice.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{1,3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{D_{1,\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & -7 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{2,1,-3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{17}{2} & 3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{D_{3,\frac{1}{3}}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{17}{2} & 3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{2,3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{2} & 3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{T_{3,2,\frac{17}{2}}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{17}{6} & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{D_{3,6}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 6 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{2,3,\frac{1}{3}}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 6 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{1,3,-2}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -34 & -12 & \frac{37}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 6 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{1,2,-\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -37 & -13 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 6 & -9 \end{array}\right)$$

Correction exercice 2

On utilise l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{1,1} & & & & 1 & & & \\ & A_{2,2} & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & A_{n,n} & & & & 1 \end{array}\right)$$

Supposons qu'il existe i tel que $A_{i,i} = 0$, en multipliant à droite et à gauche la matrice A par la matrice élémentaire de permutation $E_{i,n}$ (ce qui revient à inverser les colonnes i et n et les lignes i et n et donne la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & & & & & \\ & A_{2,2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{n,n} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_{i,i} = 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la matrice A étant sous forme échelonnée (non-réduite, mais il suffit de multiplier par des matrices de dilatations pour la mettre sous forme réduite), ayant une dernière ligne n'ayant que des zéros, on déduit que la matrice A n'est pas inversible. (La dernière ligne de la partie droite de la matrice globale étant non-nulle) (Ceci montre, par contraposée, le sens direct de l'équivalence de l'énoncé).
Si pour tout i, $A_{i,i} \neq 0$, en multipliant à gauche successivement par les matrices élémentaires de dilatation $D_{i,\frac{1}{A_{i,i}}}$ pour $1 \leq i \leq n$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \frac{1}{A_{1,1}} & & & \\ & 1 & & & & \frac{1}{A_{2,2}} & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & \frac{1}{A_{n,n}} \end{array}\right)$$

Par conséquent A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_{1,1}} & & & \\ & \frac{1}{A_{2,2}} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{1}{A_{n,n}} \end{pmatrix}$

Correction exercice 3
On utilise l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} & 1 & & & \\ 0 & A_{2,2} & & A_{2,n} & & 1 & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ & & 0 & A_{n,n} & & & & 1 \end{array}\right)$$

La matrice est cette fois encore sous forme échelonnée (non-réduite), par conséquent, s'il existe i tel que $A_{i,i} = 0$ l'algorithme de Gauss-Jordan aboutit à une matrice ayant une dernière ligne de zéros pour A et une dernière ligne non-nulle à droite, et dans ce cas A n'est pas inversible. Dans le cas contraire, on obtient que $rg(A) = n$ (pour avoir la forme échelonnée réduite de la matrice il suffit de multiplier par les matrices élémentaires de dilatation, comme à l'exercice précédent.) On en déduit que A est inversible.

Correction exercice 4
Les opérations des lignes sont notées par :
– *faire la multiplication de la ligne i par le scalaire non-nul a : aRi ;*
– *transposer la ligne i et la ligne j : $Ri \leftrightarrow Rj$;*
– *remplacer la ligne j par la ligne j plus a fois la ligne i : $Rj + aRi$.*

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2-R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3-2R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3+R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1-2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 23 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R1} \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 23 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1+R2} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 23 & -35 \\ -3 & 4 & 23 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2+3R1} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 23 & -35 \\ 0 & 46 & 92 & -138 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/46)R2} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 23 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1+(-14)R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ -1 & 6 & 15 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1\leftrightarrow R5} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 15 & 8 \\ 5 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 5 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3-2R1]{R2+(-5)R1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 31 & 73 & 31 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R5-2R1]{R4-3R1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 31 & 73 & 31 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[R2-R3]{R4-R3} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3-R2]{R5-R2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2\leftrightarrow R3} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3-15R2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/52)R3} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R2+R3]{R1+15R3} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1+6R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 5

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R1\leftrightarrow R3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-3R1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&-11&10&6&-8\\4&0&0&-5&2\end{array}\right)\xrightarrow{R4-4R1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&-11&10&6&-8\\0&-12&4&3&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3+11R2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&-1&17&-8\\0&-12&4&3&-10\end{array}\right)\xrightarrow{R3+12R2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&-1&17&-8\\0&0&-8&15&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)R3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-17&8\\0&0&-8&15&-10\end{array}\right)\xrightarrow{R4+8R3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-17&8\\0&0&0&-121&54\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1/121)R4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-17&8\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)\xrightarrow{R3+17R4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R2-R4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&0&54/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)\xrightarrow{R2+R3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&-2&3\\0&1&0&0&104/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1+2R4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-1&0&255/121\\0&1&0&0&104/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)\xrightarrow{R1+R3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&0&0&305/121\\0&1&0&0&104/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1-3R2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-7/121\\0&1&0&0&104/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right).$$

Donc $w=-7/121$, $x=104/121$, $y=50/121$ *et* $z=-54/121$.

2.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&3\\1&2&3&4&5&1\\1&3&5&7&9&4\end{array}\right)\xrightarrow[R3-R1]{R2-R1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&3\\0&1&2&3&4&-2\\0&2&4&6&8&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-2R2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&3\\0&1&2&3&4&-2\\0&0&0&0&0&5\end{array}\right)$$

alors le système n'a pas de solution (on a $0x_5=5$*).*

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&2&4\\2&0&3&5\end{array}\right)\xrightarrow[R3-2R1]{R2-R1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&2&1&3\\0&2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R3-R2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&2&1&3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1/2)R2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&1/2&3/2\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R1+R2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3/2&5/2\\0&1&1/2&3/2\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Alors toute solution est de la forme $x=(1/2)(5-3t)$, $y=(1/2)(3-t)$, $z=t$.

Correction exercice 6
La matrice associé au système d'équeations linéaires donné est

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right).$$

On la transforme en forme échelonnée réduite :

$$A \xrightarrow{R2-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow{R3-R1} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-2R2} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-3 \end{array}\right)$$

Si $a = 5$ et $b \neq 3$, alors le système n'est pas consistent (car $0 = 0z = b - 3 \neq 0$). Si $a \neq 5$ alors le système a exactement une solution. Si $a = 5$ et $b = 3$, alors le système a une solution paramétrisée par z. En effet, la forme échelonnée réduite en ce cas est

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

alors $y = 1 - 2z$ et $x = z$.