EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2008-2009

Corrigé de la série 8

Exercice 1.

1. $T_1(2(1,1)) = T(2,2) = 4 \neq 2 = 2T_1(1,1)$. Donc T_1 n'est pas linéaire, car elle n'est pas homogène. Elle n'est pas additive non plus : $T_1((1,0)+(0,1)) = T_1(1,1) = 1$ tandis que $T_1(1,0)+T_1(0,1) = 0+0 = 0$.
2. $T_2\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = T_2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$ tandis que $2 \cdot T_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ alors T_2 n'est pas homogène et donc elle n'est pas linéaire. (Elle n'est pas additive non plus.)
3. Soient $a \in \mathbb{F}$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Alors
$$T_3(ap) = ((ap)(0),(ap)(1)) = (a(p(0)),a(p(1))) = a(p(0),p(1)) = aT_3(p)$$
donc T_3 est homogène. Soit $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Alors
$$\begin{aligned} T_3(p+q) &= ((p+q)(0),(p+q)(1)) \\ &= (p(0)+q(0),p(1)+q(1)) \\ &= (p(0),p(1))+(q(0),q(1)) \\ &= T_3(p)+T_3(q) \end{aligned}$$
et T_3 est additive. Par conséquent, elle est linéaire.
On a : $p(x) \in \ker(T_3) \Leftrightarrow p(0) = p(1) = 0 \Leftrightarrow p(x)$ est divisible par x et $x-1 \Leftrightarrow p(x) = x(x-1)q(x)$ pour un certain $q(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. En somme :
$$\ker(T_3) = \{x(x-1)q(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \,|\, q(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$
Pour tout $n \geq 0$, la liste $(x(x-1), x(x-1)x, x(x-1)x^2, \ldots, x(x-1)x^n)$ est libre, comme on vérifie facilement. Par conséquent, $\ker(T_3)$ est un sous-espace vectoriel de dimension infinie.
Pour $a,b \in \mathbb{F}$, le polynôme $p(x) = (b-a)x+a$ satisfait $p(0) = a$ et $p(1) = b$. Cela montre que $\mathrm{im}(T_3) = \mathbb{F}^2$, dont une base est donnée par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
4. Soient $a \in \mathbb{R}$, $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors
$$\begin{aligned} T_4(a(x_1,x_2,x_3)) &= T_4(ax_1,ax_2,ax_3) \\ &= (ax_3-2ax_1,3ax_2) \\ &= a(x_3-2x_1,3x_2) \\ &= aT_4(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} T_4((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) &= T_4(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3) \\ &= ((x_3+y_3)-2(x_1+y_1),3(x_2+y_2)) \\ &= ((x_3-2x_1)+(y_3-2y_1),3x_2+3y_2) \\ &= (x_3-2x_1,3x_2)+(y_3-2y_2,3y_2) \\ &= T_4(x_1,x_2,x_3)+T_4(y_1,y_2,y_3) \end{aligned}$$

alors T_4 est linéaire.

Le noyau de T_4 est donné par

$$\ker(T_4) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\, x_3 - 2x_1 = 0 \text{ et } 3x_2 = 0\} = \{(\alpha, 0, 2\alpha) |\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et admet $((1, 0, 2))$ comme base.

Pour l'image, on a $\mathrm{im}(T_4) = \mathbb{R}^2$, car un vecteur $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ arbitraire admet $(0, \frac{y_2}{3}, y_1)$ comme antécédent. Une base est donnée par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

5. Soient $t \in \mathbb{R}$, $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$. Alors $T_5(t(a+bi)) = T_5(ta+tbi) = ta - tbi = t(a-bi) = tT_5(a+bi)$. Également, $T_5((a+bi)+(c+di)) = T_5((a+c)+(b+d)i) = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = T_5(a+bi)+T_5(c+di)$. Donc T_5 est $\mathbb{R}$-linéaire.
   On a $\ker(T_5) = \{0\}$, qui admet $\emptyset$ comme base.
   L'image de T_5 est $\mathrm{im}(T_5) = \mathbb{C}$. Une base est donnée par $(1, i)$.
6. T_6 n'est pas homogène par rapport aux scalaires complexes. Par exemple, on considère le scalaire $i \in \mathbb{C}$ et le vecteur $1+i \in \mathbb{C}$. Alors $T_6(i(1+i)) = T_6(-1+i) = -1-i$, tandis que $iT_6(1+i) = i(1-i) = 1+i$. Donc T_6 n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.
7. (a) On vérifie que T est linéaire.
   Pour P et Q dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ on a :

   $$T(P+Q) = P+Q+(P+Q)'+(P+Q)'' = P+Q+P'+Q'+P''+Q'' = T(P)+T(Q).$$

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $T(\lambda P) = \lambda P + (\lambda P)' + (\lambda P)'' = \lambda P + \lambda P' + \lambda P'' = \lambda T(P)$.

   (b) Pour montrer que T est injective, nous allons montrer que son noyau est réduit à zéro.

   $$Ker(T) = \{P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \mid P + P' + P'' = 0\}.$$

   Soit $P \in Ker(T)$. Pour montrer que $P = 0$ on peut procéder de deux manières :
   - Soit on écrit P sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et, en utilisant le fait que $\{1, X, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ on montre que $P + P' + P'' = 0$ implique que $P = 0$.
   - Soit on remarque que $\deg(T(P)) = \deg(P)$ (le montrer !). Par conséquent $T(P) = 0$ implique que $P = 0$.

   Par le théorème du rang, on a :

   $$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n+1$$

   par injectivité de T on en déduit que $dim(Im(T)) = n+1$ et donc $Im(T) = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. L'application T est donc bijective.
8. On vérifie que T_7 est linéaire. Pour f et g dans $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ on a :

   $$T_7(f+g) = \{t \mapsto \frac{f(t)+g(t)}{1+t^2}\} = \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\} + \{t \mapsto \frac{g(t)}{1+t^2}\} = T_7(f) + T_7(g).$$

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $T_7(\lambda f) = \{t \mapsto \frac{\lambda f(t)}{1+t^2}\} = \lambda\{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\} = \lambda T_7(f)$.
   Le noyau de T_7 est l'ensemble suivant :

   $$\ker(T_7) = \{f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) \mid \frac{f(t)}{1+t^2} = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$
   $$= \{f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\} = \{0\}.$$

   L'application T_7 est donc injective.
   L'image de T_7 est $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ (T_7 est donc surjective et donc bijective) car pour $g : t \mapsto g(t)$ un élément de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$, $(1+t^2)g(t) \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$, est un antécédent de $g(t)$ par T_7.

9. L'application T_8 n'est pas linéaire. Par exemple, pour $\lambda = 2$ on a $T_8(2f) = \{t \mapsto \frac{4f(t)^2}{1+t^2}\}$ et $2T_8(f) = 2\{t \mapsto \frac{f(t)^2}{1+t^2}\} = \{t \mapsto \frac{2f(t)^2}{1+t^2}\}$.

Exercice 2. On montre que P est linéaire. Soient $A = (\alpha_{i,j}), B = (\beta_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{F})$. Pour $1 \leq i, j \leq n$ on calcule :

$$\begin{aligned}(P(A+B))_{i,j} &= \frac{1}{2}((A+B)_{i,j} - (A+B)^T_{i,j}) = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \beta_{i,j} - \alpha_{j,i} - \beta_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} - \alpha_{j,i}) + \frac{1}{2}(\beta_{i,j} - \beta_{j,i}) = (P(A))_{i,j} + (P(B))_{i,j} = (P(A) + P(B))_{i,j}.\end{aligned}$$

Donc $P(A+B) = P(A) + P(B)$. De manière similaire, on vérifie que $P(\lambda A) = \lambda P(A)$ pour $\lambda \in \mathbb{F}$.

Déterminons $\ker(P)$. Pour $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{F})$, nous avons : $A = (\alpha_{i,j}) \in \ker(P) \Leftrightarrow P(A) = \vec{0} \Leftrightarrow (P(A))_{i,j} = 0 \; \forall i, j \Leftrightarrow \alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} \forall i, j \Leftrightarrow A \in S(n)$. Donc : $\ker(P) = S(n)$.

Les matrices $B = (\beta_{i,j})$ dans l'image de P sont de la forme $B = \frac{1}{2}(A - A^T)$ pour un certain $A = (\alpha_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{F})$. Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, il existe donc $\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i} \in \mathbb{F}$ tels que $\beta_{i,j} = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} - \alpha_{j,i})$. En particulier, il faut que $\beta_{i,j} = -\beta_{j,i}$. On a donc une inclusion $\mathrm{im}(P) \subseteq A(n)$. D'autre part toute matrice antisymétrique $C = (\gamma_{i,j}) \in A(n)$ est contenue dans l'image de P. Par exemple, la matrice $A = (\alpha_{i,j})$ définie par

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 2\gamma_{i,j}, & i \geq j, \\ 0, & i < j \end{cases}$$

satisfait $P(A) = C$. Encore plus simplement, on a $P(C) = C$. En résumé : $\mathrm{im}(P) = A(n)$.

Exercice 3. Nous montrons d'abord que $\ker(T) + \mathrm{span}(v) = V$. Soit $w \in V$. Posons $\mu := T(w)$ et $\eta := T(v)$. Par hypothèse, η est non-nul. Par linéarité de T, nous avons $T(w - \frac{\mu}{\eta}v) = 0$. Donc $w - \frac{\mu}{\eta}v \in \ker(T)$ et alors $w = (w - \frac{\mu}{\eta}v) + \frac{\mu}{\eta}v \in \ker(T) + \mathrm{span}(v)$.

Voyons maintenant que $\ker(T) \cap \mathrm{span}(v) = \{0\}$. Nous pouvons écrire un élément $w \in \ker(T) \cap \mathrm{span}(v)$ sous la forme $w = \rho v$, $\rho \in \mathbb{F}$. Donc $T(w) = \rho T(v)$ par linéarité de T. D'autre part, $T(w) = 0$ comme $w \in \ker(T)$. Comme $T(v) \neq 0$, il faut que $\rho = 0$. Par conséquent, on a $w = \rho v = 0$.

Exercice 4.

1. L'application identité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, y)$ est linéaire et vérifie $Ker(f) = \{(0,0)\} \subset Im(f) = \mathbb{R}^2$.
2. L'application nulle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (0, 0)$ est linéaire et vérifie $Im(f) = \{(0,0)\} \subset Ker(f) = \mathbb{R}^2$.
3. D'après l'exercice précédent, $ker(f) = im(f)$ si et seulement si $f^2 = 0$ et $2.rg(f) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$, c'est-à-dire $rg(f) = 1$. On vérifie que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x - y)$ est linéaire et vérifie ces deux conditions.

Exercice 5. Si $u \in \ker(T \circ S)$, alors $Su \in \ker T$. Alors on obtient, par restriction, une application linéaire $S' : \ker(T \circ S) \to \ker T$, et $\mathrm{Im}\, S' \subset \ker T$. Par la formule de dimension, on a

$$\dim \ker(T \circ S) = \dim \ker S' + \dim \mathrm{Im}\, S'.$$

Mais $\ker S' = \ker S$ (car $\ker S \subset \ker(T \circ S)$) et $\mathrm{Im}\, S' \subset \ker T$, alors

$$\dim \ker(T \circ S) \leq \dim \ker S + \dim \ker T.$$