LES NOMBRES COMPLEXES ET LES POLYNÔMES

1. Les nombres complexes

Puisque le carré de tout nombre réel est positif, aucun nombre réel négatif n'a de racine carrée réelle. Or il est souvent essentiel en physique et en mathématiques de savoir qu'il existe pour tout nombre réel x un autre "nombre" y tel que $y^2 = x$. Pour y arriver il suffit d'introduire un nouveau nombre, noté i, tel que $i^2 = -1$. Dès lors, si x est n'importe quel nombre négatif, on obtient que

$$\left(\sqrt{|x|} \cdot i\right)^2 = x,$$

i.e., x admet une racine carrée.

Définition 1.1. Un *nombre complexe* est une expression de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels. L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Etant donné deux nombres complexes $w = a + bi$ et $z = c + di$, leur *somme* est le nombre complexe

$$w + z := (a + c) + (b + d)i.$$

Leur *produit* est le nombre complexe

$$w \cdot z := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Remarque 1.2. Observer que l'ensemble de tous les nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est un sousensemble de $\mathbb{C}$, puisque $a = a + 0i$ pour tout nombre réel a. D'ailleurs, la somme usuelle de deux nombres réels est égale à leur somme en tant que nombres complexes. De même, leur produit usuel est égal à leur produit en tant que nombres complexes.

Remarque 1.3. Tout nombre complexe $a + bi$ correspond à un point (a, b) du plan réel $\mathbb{R}^2$. Il peut donc être déterminé par un angle θ par rapport à la demidroite $\{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ et par une distance r depuis l'origine, i.e., le rayon du cercle centré à l'origine sur lequel le point (a, b) se trouve.

La proposition suivante donne toutes les propriétés les plus importantes des opérations arithmétiques complexes. Elle nous dit que $\mathbb{C}$, muni des opérations définies ci-dessus, est un *corps*, tout comme $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles. En fait $\mathbb{R}$ est un *souscorps* de $\mathbb{C}$.

Proposition 1.4. *Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes. Alors:*

(1) *(Commutativité de l'addition et de la multiplication)*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad et \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

(2) *(Associativité de l'addition et de la multiplication)*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad et \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

(3) *(Eléments neutres additifs et multiplicatifs)*

$$z_1 + 0 = z_1 \quad et \quad z_1 \cdot 1 = z_1;$$

(4) *(Inverses additifs) il existe un nombre complexe* v_1 *tel que* $z_1 + v_1 = 0$*;*
(5) *(Inverses multiplicatifs) si* $z_1 \neq 0$*, il existe un nombre complexe* w_1 *tel que* $z_1 \cdot w_1 = 1$*; et*
(6) *(Distributivité)* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Pour conclure cette section, nous examinons quelques opérations qui associent un nombre réel à un nombre complexe.

Définition 1.5. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. La *partie réelle* de z est le nombre réel $\mathrm{Re}(z) := a$, tandis que sa *partie imaginaire* est le nombre réel $\mathrm{Im}(z) := b$. La *conjuguée complexe* de z est le nombre complexe $\bar{z} := a - bi$. Le *module* (ou la *valeur absolue*) de z est le nombre réel

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La proposition suivante résume les relations parmi toutes les opérations sur les nombres complexes définies dans cette section.

Proposition 1.6. *Soient* w *et* z *des nombres complexes. Alors:*
(1) $\mathrm{Re}(w + z) = \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Re}(z)$*;*
(2) $\mathrm{Im}(w + z) = \mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)$*;*
(3) $z + \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$*;*
(4) $z - \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot i$*;*
(5) $\overline{w + z} = \overline{w} + \bar{z}$*;*
(6) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \bar{z}$*;*
(7) $\bar{\bar{z}} = z$*; et*
(8) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$.

2. Polynômes et leurs racines

Les polynômes à coefficients réels ou complexes sont des outils très importants en algèbre linéaire. Ici nous rappelons brièvement les définitions élémentaires nécessaires, ainsi que les résultats essentiels concernant l'existence de racines de polynômes. Pour plus de détails, voir le Chapitre 4 du livre d'Axler.

Dorénavant $\mathbb{F}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1. Soit n un nombre naturel. Un *polynôme de degré* n *à coefficients dans* $\mathbb{F}$ est une application $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ telle qu'il existe $a_0, .., a_n \in \mathbb{F}$, avec $a_n \neq 0$, vérifiant $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{F}$. Un polynôme de degré 0 est appelé *constant*.

L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}$ est noté $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, tandis que l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}$ et de degré au plus n est noté $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$.

Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Un élément λ de $\mathbb{F}$ est une *racine* du polynôme p si $p(\lambda) = 0$.

Remarque 2.2. Pour voir que la notion du "degré" d'un polynôme à coefficients réels ou complexes n'est pas ambiguë, i.e., qu'un polynôme ne peut pas avoir des degrés distincts, on démontre que si $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$ pour tout $z \in \mathbb{F}$, alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Remarque 2.3. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout polynôme à coefficients réels peut être vu comme un polynôme à coefficients complexes. Autrement dit, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Voici les propriétés élémentaires les plus importantes des racines de polynômes. Les preuves se trouvent dans le Chapitre 4 du livre d'Axer.

Proposition 2.4. *Soit* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

(1) *Si* p *est de degré* n*, alors* p *a au plus* n *racines distinctes dans* $\mathbb{F}$.
(2) *Si* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$*, alors un nombre complexe* λ *est une racine de* p *(vu comme un polynôme à coefficients complexes) seulement si* $\bar{\lambda}$ *est aussi une racine de* p.

Sans savoir qu'il existe toujours des racines complexes de polynômes à coefficients complexes, ce que nous garantit le théorème suivant, on ne pourrait pas faire grand'chose. On dit que le corps $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos.*

Théorème 2.5 (Le théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme nonconstant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.*

Remarque 2.6. L'énoncé ci-dessus est FAUX si le mot "complexe" est partout remplacé par le mot "réel."

Un argument "par récurrence" (une technique que nous employerons souvent!) nous permet de démontrer le résultat suivant à partir du Théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 2.7 (Factorisation de polynômes complexes)**.** *Soit* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$*. Si* p *est nonconstant, alors il existe des nombres complexes* $c, \lambda_1, ..., \lambda_n$*, pas forcément tous distincts, tels que*

$$p(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$$

pour tout nombre complexe z*. D'ailleurs, cette factorisation est unique à ordre des facteurs près.*

Nous terminons par une présentation de ce que l'on peut dire dans le cas réel. Il faut d'abord se souvenir de la formule quadratique pour les racines d'un polynôme de degré 2.

Proposition 2.8. *Soit* $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ *un polynôme de degré 2 à coefficients dans* $\mathbb{C}$*. Alors les racines de* p *sont*

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

En particulier, si $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*, alors ses racines sont réelles si et seulement si*

$$a_1^2 - 4a_0a_2 \geq 0.$$

Le prochain théorème est analogue au Théorème 2.7, mais s'applique au cas réel.

Théorème 2.9 (Factorisation de polynômes réels)**.** *Soit* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$*. Si* p *est nonconstant, alors il existe des nombres réels* $c, \lambda_1, ..., \lambda_m, \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_l, \beta_l$*, pas forcément tous distincts, tels que*

$$p(x) = c(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_m)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)$$

pour tout nombre réel x *et tels que* $\alpha_j^2 < 4\beta_j$ *pour tout* j*. D'ailleurs, cette factorisation est unique à ordre des facteurs près.*