Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des sciences de base
Institut de Géométrie, Algèbre et Topologie

Prof. K. Hess Bellwald

# Algèbre Homologique : Série 10

**17.5.2004**

---

**Définition 1 :** Etant donné un module $B$ et un sous-module $B'$ de $B$, on définit la **dimension projective suprêmale** du couple $(B', B)$ comme étant

$$SPdim(B', B) := sup\{Pdim(C) \mid C \text{ est un sous-module de } B \text{ contenant } B'\}$$

de plus, on notera $SPdim(B) := SPdim(0, B)$.

**Définition 2 :** Soit $R$ un anneau et $S \subset R$ tel que $S$ contient 1, ne contient pas 0 et est fermé sous la multiplication ($S$ est alors dit admissible multiplicativement). On définit l'anneau quotient de $R$ par $S$ comme

$$S^{-1}R := S \times R/\sim$$

où $(s, r) \sim (s', r') \Leftrightarrow \exists s^* \in S \mid s^*(sr' - s'r) = 0$. Si $B$ est un $R$-module, on définit $S^{-1}B$ de la même manière.

(1) Montrer que si $RGdim(R) > 0$ et $0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n = R$ est une chaîne d'idéaux à droite, alors
$$RGdim(R) = 1 + max\{SPdim(I_{j-1}, I_j)\}.$$

(2) Soit $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$.

 (a) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R$ est un idéal à droite projectif et trouver son complément à $R$.

 (b) Déterminer les idéaux à droite contenus dans $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R$ et montrer qu'ils sont tous projectifs. En déduire que sa dimension suprêmale est nulle.

 (c) Déterminer les idéaux à droite contenu dans $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R$ et montrer qu'ils sont tous projectifs. En déduire que sa dimension suprêmale est nulle.

 (d) Utiliser l'exercice (1) pour montrer que $RGdim(R) = 1$.

(3) Soit $R$ un anneau commutatif et $S$ un sous-ensemble admissible multiplicativement. Montrer que $S^{-1}R$ est un $R$-module plat.

(4) Sous les mêmes hypothèses, montrer que si $B$ est un $R$-module alors
$$S^{-1}B \simeq S^{-1}R \otimes_R B.$$

(5) Dans cet exercice nous allons montrer que $LGdim(R) = LGdim(M_n(R))$. Nous utiliserons les théorèmes suivant

**Théorème 1 :** Soit $F : {}_SMod \to {}_RMod$ un foncteur exact et fortement additif. Alors

$$Pdim_R F(B) \leq Pdim_S B + Pdim_R F(S).$$

**Théorème 2 :** Si $LGdim(R) > 0$ et si $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ est une somme directe d'idéaux à gauche, alors

$$LGdim(R) = 1 + max\{SPdim I_j\}.$$

(a) Soit $R' := M_n(R)$. On définit $\phi : R \to R'$ par $\phi(r) = r \cdot I_n$. Montrer que pour tout $R'$-module $B'$ on a $Pdim_R B' \leq Pdim_{R'} B'$.

(b) Soit $F : {}_RMod \to {}_{R'}Mod$ tel que $F(B) = B^n$ dont les éléments sont vus comme des vecteurs colonnes. Montrer que $F(R)$ est projectif comme $R'$-module. En déduire que $Pdim_{R'} F(B) \leq Pdim_R(B)$.

(c) Montrer que $Pdim_R(B) = Pdim_{R'} F(B)$ pour tout $R$-module $B$ et en déduire que $LGdim(R) \leq LGdim(M_n(R))$.

(d) Montrer que tous les idéaux de $F(R)$ sont de la forme $F(I)$ pour $I$ un idéal de $R$.

(e) On pose $I_1, \ldots, I_n$ les idéaux colonnes de $R'$. Par l'exercice (1), on a que $LGdim(R') = 1 + SPdim_{R'} F(R)$. Montrer que $LGdim(R') = LGdim(R)$.