Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des sciences de base
Institut de Géométrie, Algèbre et Topologie

Prof. K. Hess Bellwald

# Algèbre Homologique : Série 11

**24.5.2004**

---

(1) Soit $R$ un anneau et $S$ un sous ensemble de $R$ admissible multiplicativement.

(a) Montrer que si $M$ et $N$ sont des $R$-modules alors

$$S^{-1}Tor_n^R(M,N) \simeq Tor_n^{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

pour tout $n$.

(b) Si $R$ est Noetherien, $M$ et $N$ sont des $R$-modules et $M$ est finiment engendré alors $S^{-1}Ext_R^n(M,N) \simeq Ext_{S^{-1}R}^n(S^{-1}M, S^{-1}N)$ pour tout $n$.

(2) Soit $R$ un anneau Noetherien et $P$ un idéal premier de $R$. On note $R_P$ l'anneau quotient $(R-P)^{-1}R$. On appelle $R_P$ la localisation de $R$ par rapport à $P$. Montrer que

$$LGdim(R) = \sup_P(LGdim(R_P)) = \sup_m(LGdim(R_m))$$

où $P$ parcourt les idéaux premiers de $R$ et $m$ parcourt les idéaux maximaux.

**Définition :** On appelle un anneau $R$ **local** si il est commutatif, Noetherien et possède un unique idéal maximal. On notera ceci $(R,m)$ où $m$ est l'idéal maximal.

(3) Soit $(R,m)$ un anneau local. Montrer que si $h : F \to M$ est une surjection de $R$-modules avec $F$ libre et $M$ finiment engendré. On supposera en plus que $h$ est minimale, i.e. $h$ induit un isomorphisme $F/mF \to M/mM$. Montrer que l'homomorphisme $h^* : Hom(M, R/m) \to Hom(F, R/m)$ induit par $h$ est un isomorphisme.

(4) Soit $(R,m)$ un anneau local. Montrer qu'un $R$-module $M$ finiment engendré est libre si et seulement si $Ext_R^1(M, R/m) = 0$.

(5) Soit $(R,m)$ un anneau local. Montrer que pour tout module finiment engendré $M$, on a $Pdim(M) = \sup\{n \mid Ext_R^n(M, R/m) \neq 0\}$.

(6) Soit $(R,m)$ un anneau local. Montrer que

$$LGdim(R) = \sup\{n \mid Ext_R^n(R/m, R/m) \neq 0\}.$$