Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des sciences de base
Institut de Géométrie, Algèbre et Topologie

Prof. K. Hess Bellwald

Algèbre Homologique : Série 12

7.6.2004

---

(1) Soit M un R-module. On définit $Z(M) := \{r \in R \mid \exists x \in M \text{ tel que } rx = 0\}$. Montrer que si $x \notin Z(R)$ et $x \notin Z(M)$ alors $Pdim_{R/(x)}(M/xM) \leq Pdim_R(M)$.

Définition : Soit M un R-module. On définit le complexe de Koszul de M en degré p comme étant $\bigotimes^p M$ quotienté par le sous-module engendré par les éléments $m_1 \otimes \ldots \otimes m_p$ où deux des m_i sont identiques. Ce quotient sera noté $\bigwedge^p M$ et on notera $m_1 \wedge \ldots \wedge m_p$ pour la classe d'équivalence de $m_1 \otimes \ldots \otimes m_p$. Le **complexe de Koszul de M** est $\bigwedge M := \bigoplus_p \bigwedge^p M$. Si $\phi \in Hom(M, R)$, on a une différentielle sur $\bigwedge M$ qui est

$$d_p(m_1 \wedge \ldots \wedge m_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \phi(m_i) m_1 \wedge \ldots \wedge m_{i-1} \wedge m_{i+1} \wedge \ldots \wedge m_p.$$

Soit maintenant $x_1, \ldots, x_n \in R$ et $F = \bigoplus_{i=1}^n Re_i$, on notera $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ pour le complexe de chaîne $\bigwedge F$ muni de la différentielle d_i où ϕ envoie les e_i sur les x_i.

(2) Soit une suite régulière $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'éléments d'un anneau R.

(a) Montrer que le complexe de Koszul $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ est une résolution libre de $R/(x_1, \ldots, x_n)$.

(b) Montrer que $Pdim_R(R/(x_1, \ldots, x_n)) = n$.

(3) Montrer que si P est un idéal premier de R alors $dim(R_P) = ht(P)$.

(4) Montrer que

$$dim(R) = \sup_{m \in Max(R)} dim(R_m) = \sup_{m \in Max(R)} ht(m).$$

Lemme 1 : Soit Q et Q' deux idéaux premiers distincts de $R[x]$ avec $Q \subset Q'$ et $Q \cap R = Q' \cap R = P$. Alors $Q = PR[x]$.

(5) (a) Utiliser le lemme 1 pour montrer que si $Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2$ est une chaîne d'idéaux premiers distincts de $R[x]$, alors $Q_0 \cap R \neq Q_2 \cap R$.

(b) Montrer que $dim(R[x]) \leq 2dim(R) + 1$.

Lemme 2 : Soit R un anneau noetherien, Q un idéal premier de $R[x]$ et $P = Q \cap R$. Si $Q = PR[x]$, alors $ht(Q) = ht(P)$.

(6) Soit R un anneau noetherien.

(a) Soit Q un idéal premier de $R[x]$ et $P = Q \cap R$.

(b) Utiliser le lemme 2 pour montrer que $dim(R[x]) \leq dim(R) + 1$.

Indice : Soit $n = ht(Q)$ et $Q_0 \subset \ldots \subset Q_n$. Poser $P_i = Q_i \cap R$ et se demander si les P_i sont tous différents.

(7) Soit m un idéal maximal de R et $x \in m - m^2$. Montrer qu'il existe $m' \subset m/xm$ tel que $m/(x) \oplus m' \simeq m/xm$.