

PROF. K. HESS BELLWALD

## Algèbre Homologique : Série 8

3.5.2004

---

(1) Soit la suite exacte courte :  $0 \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow B'' \rightarrow 0$ . On suppose que  $Pdim(B) > Pdim(B')$  ou que  $Pdim(B'') > 1 + Pdim(B')$ . Montrer que  $Pdim(B'') = 1 + Pdim(B)$ .

(2) Montrer que si l'on a deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

avec  $P_1$  et  $P_2$  projectifs, alors  $K_1 \oplus P_2 \simeq K_2 \oplus P_1$ .

(3) On dit qu'un module  $B$  est finiment présenté si il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\pi) \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

de modules finiment engendrés avec  $F$  libre. Soit  $B$  un module finiment présenté et  $P$  un module projectif finiment engendré tels que la suite  $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow 0$  est exacte, montrer que  $K$  est finiment engendré.

(4) Montrer que si dans la suite exacte courte  $0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$ , deux des modules sont de dimension projective finie alors le troisième l'est aussi. De plus si  $Pdim(A) = n < \infty$  et que  $Pdim(A'') \leq n$  alors  $Pdim(A') = n$ .

(5) Soit  $A$  un  $R$ -module à droite. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(a)  $A$  est plat.

(b)  $Tor_n^R(A, B) = 0$  pour tout  $B \in {}_R\text{Mod}$  et  $n \geq 1$ .

(c)  $Tor_1^R(A, R/I) = 0$  pour tout idéal à gauche finiment engendré  $I$ .

De même si  $B$  est un  $R$ -module à gauche, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(a)  $B$  est plat.

(b)  $Tor_n^R(A, B) = 0$  pour tout  $A \in \text{Mod}_R$  et  $n \geq 1$ .

(c)  $Tor_1^R(R/J, B) = 0$  pour tout idéal à droite finiment engendré  $J$ .

(6) Montrer que  $Tor_n^R(A, B)$  peut être calculé à partir d'une résolution plate de  $B$ .

(7) Nous allons démontrer le théorème de Künneth. Soit  $R$  un anneau possédant la propriété que tous les modules sur  $R$  ont une résolution plate de longueur plus petite ou égale à 1. Soient encore  $(F_i, d_i)$  et  $(F'_j, d'_j)$  deux complexes de chaînes de  $R$ -modules plats. On pose  $(\overline{F}_i, \overline{d}_i) = (F_i, d_i) \otimes (F'_i, d'_i)$ . Montrer que l'on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(F) \otimes H_j(F') \xrightarrow{\kappa} H_n(\overline{F}) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \text{Tor}_1^R(H_i(F), H_j(F')) \longrightarrow 0$$

(a) On définit  $\overline{F}'_n := \bigoplus_{i+j=n} F_i \otimes \text{Ker}(d'_j)$  et  $\overline{F}^*_n := \bigoplus_{i+j=n} F_i \otimes \text{Im}(d'_j)$ . On a une suite exacte courte  $0 \rightarrow \overline{F}'_n \rightarrow \overline{F}_n \rightarrow \overline{F}^*_n \rightarrow 0$ . Trouver la suite exacte longue associée et montrer que l'on a une autre suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_n(\overline{F}') / \text{Im}(\delta_{n+1}) \rightarrow H_n(\overline{F}) \rightarrow \text{Ker}(\delta_n) \rightarrow 0$$

où  $\delta$  est l'homomorphisme de connexion défini par le lemme du serpent.

(b) Utiliser l'exercice précédent pour montrer que  $H_n(\overline{F}') \simeq \bigoplus_{i+j=n} H_i(F) \otimes \text{Ker}(d'_j)$  et que  $H_n(\overline{F}^*) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H_i(F) \otimes \text{Im}(d'_j)$ .

(c) Utiliser le point (b) pour donner une définition de  $\delta_{n+1} : H_{n+1}(\overline{F}^*) \rightarrow H_n(\overline{F}')$ .

(d) La suite  $0 \rightarrow \text{Im}(d'_{j+1}) \rightarrow \text{Ker}(d'_j) \rightarrow H_j(F') \rightarrow 0$  est une résolution plate de  $H_j(F')$ . Utiliser le fait que l'on peut calculer  $\text{Tor}_*(H_i(F), H_j(F'))$  à partir d'une résolution plate de  $H_j(F')$  pour identifier le noyau de  $\delta_{n+1}$ .

(e) Montrer que

$$\bigoplus_{i+j=n} (H_i(F) \otimes \text{Ker}(d'_j)) / \text{Im}(\delta_{n+1}) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H_i(F) \otimes H_j(F').$$

et conclure.