Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des sciences de base
Institut de Géométrie, Algèbre et Topologie

Prof. K. Hess Bellwald

Algèbre Homologique : Série 9

10.5.2004

---

(1) Soit $\{B_i\}$ une famille de R-modules à gauche. Montrer que $Pdim(\oplus_i B_i) = sup_i(Pdim(B_i))$.

(2) Soit P un R-module à gauche projectif finiment engendré et C un R-module à gauche. Montrer que $P^* \otimes C \to Hom(P, C)$ est un isomorphisme.

(3) Soit B un module tel que $Pdim(B) = N \geq n$. Montrer que le $n$ième noyau de toute résolution projective de B a une dimension projective de $N - n$.

(4) Montrer que si dans la suite exacte courte $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$, deux des modules sont de dimension projective finie alors le troisième l'est aussi. De plus si $Pdim(A) = n < \infty$ et que $Pdim(A'') \leq n$ alors $Pdim(A') = n$.

(5)
  (a) Soit $R = C^\infty(\mathbb{R})$, l'anneau des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit M l'idéal $\{f \in R \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $Pdim_R(R/M) = 1$.
  (b) Soit $R = C(\mathbb{R})$, l'anneau des fonctions continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit M l'idéal $\{f \in R \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $Pdim_R(R/M) > 1$.

(6) Soit R l'anneau des fonctions C^∞ sur R qui sont périodiques de période 2π.
  (a) Montrer que tous les idéaux maximaux ont la forme $M_a = \{f \in R \mid f(a) = 0\}$ pour un certain a. Montrer que ces idéaux sont projectifs engendrés par $sin(x - a)$ et n'importe quel $\varphi \in M_a$ tel que $\varphi(a + \pi) \neq 0$. Montrer alors que $Pdim(B) = 1$ pour tout module simple B (Un module simple est un module qui ne contient pas de sous-module propre).
  (b) Soit I, l'idéal de tous les $f \in R$ tels qu'il existe un N pour lequel $f(1/n) = 0$ dès que n est un entier positif plus grand que N. Montrer que I n'est pas projectif ce qui implique que $LGdim(R) \geq 2$.

(7) Montrer que $Tor_n^R(A, B)$ peut être calculé à partir d'une résolution plate de B.