

INTRODUCTION

A. Histoire

D'un certain point de vue le début de l'histoire de la théorie des nœuds date du temps d'Alexandre de Macédoine, plus précisément de sa résolution du problème du fameux nœud gordien. Sa réaction face à ce dilemme fut pourtant celle d'un homme d'action, et non d'un mathématicien. Il ne chercha pas à savoir si c'était possible de défaire le nœud, mais tira son épée et le trancha. Il a néanmoins réussi à devenir maître de l'Asie, même si aux yeux d'un mathématicien il avait triché face au nœud gordien!

L'histoire de la théorie des nœuds débute vraiment vers 1865, quand le futur Lord Kelvin alla rendre visite à son ami et collègue, l'écossais P. G. Tait. Pendant son séjour en Ecosse, Tait lui montra sa nouvelle invention, une machine capable de produire des ronds de fumée entrelacés. Il l'avait inventée afin d'étudier la structure et comportement possibles de tourbillons dans l'éther, un sujet de recherche alors à la mode.

Ce que Kelvin vit quand Tait mit en marche sa machine l'impressionna beaucoup: certains des ronds de fumée entrelacés ne se défirent pas, même après quelques minutes de ballottement dans l'air. Inspiré par ces observations, Kelvin inventa une nouvelle théorie de la structure des atomes et molécules, basée sur la formation d'atomes et molécules à partir de tourbillons d'éther entrelacés. Pour étudier les atomes et molécules, il était donc nécessaire de savoir quels types d'entrelacements étaient stables (i.e., ne se défaisaient pas d'eux-mêmes) et quelle était l'influence du type d'entrelacement sur le comportement chimique de l'atome ou de la molécule.

Tait, étant avisé de la nouvelle théorie de Kelvin, se décida de donner un coup de main à son collègue, en élaborant une théorie de nœuds qui pourrait ensuite être appliquée à l'étude des éléments chimiques. Plus précisément il établit le programme de recherche suivant.

LE PROGRAMME DE TAIT.

- (1) Classifier tous les nœuds.
- (2) Etablir une hiérarchie parmi les nœuds, basée sur une notion naturelle de complexité.
- (3) Comprendre pourquoi certains nœuds ne peuvent pas se produire comme structure atomique.
- (4) Expliquer la position des lignes dans le spectre d'un élément chimique en termes du type de nœud de la structure atomique.

Evidemment les deux derniers points de ce programme ne sont plus d'actualité. Par contre, les deux premiers le sont toujours, et Tait lui-même y a fait des contributions très importantes. On verra plus tard quelles étaient les contributions exactes de Tait, quand nous aurons compris le sens précis des deux premiers points de son programme.

Il s'avéra très difficile de démontrer rigoureusement les observations de Tait, parce qu'il manqua la bonne machinerie mathématique. Il ne réussit même pas à démontrer qu'il existe des nœuds vraiment noués, i.e., nondénouables.

Pendant près de 40 ans après les travaux de Tait, il y eut peu de nouveaux résultats en théorie des nœuds. Au début des années 1920, un autre mathématicien écossais, Alexander (à ne pas confondre avec celui du nœud gordien!), fabriqua une collection d'outils mathématiques – un groupe, un module, et un polynôme – que l'on peut appliquer à la résolution de problèmes de nœuds. Ce sont ces outils-là que nous allons étudier pendant la première partie de ce cours.

Ces outils, ou *invariants*, d'Alexander ont été d'une grande importance. Presque toute la recherche en théorie des nœuds entre 1920 et 1985 s'est basée sur ces invariants. Les chercheurs les ont soit appliqués à résoudre des problèmes dans d'autres domaines mathématiques, soit utilisés pour vérifier et mener à bonne fin le programme de Tait.

Depuis 1984 on assiste à une révolution dans le domaine de la théorie des nœuds. En cette année, V.F.R. Jones, un théoricien d'algèbres d'opérateurs, découvrit des liens profonds entre son domaine et celui de la théorie des nœuds. Il concrétisa ses liens dans la forme d'un nouveau et puissant invariant, le fameux polynôme de Jones.

Comme toujours après une grande découverte, beaucoup de mathématiciens ont essayé de généraliser ce résultat ou d'en trouver de belles applications. Du coup, quelques conjectures de Tait, ainsi que d'autres vieux problèmes qui traînaient depuis longtemps, furent résolus.

Le polynôme de Jones a aussi fait des petits – c'est-à-dire inspiré la définition de nouveaux invariants – en quantité. L'un des plus importants de ces nouveaux invariants fut découvert par trois équipes de chercheurs simultanément!

On comprend donc facilement que Jones a eu droit à la médaille Fields, le Prix Nobel des mathématiciens, comme récompense de son génie. C'est d'autant plus compréhensible que depuis la découverte du polynôme de Jones, on a pu comprendre des liens mystérieux et puissants entre la théorie des nœuds et

- la physique quantique,
- la théorie des plasmas confinés dans un champ magnétique,
- la mécanique statistique,
- la recombinaison de l'ADN et de l'ARN,
- la science des polymères,
- la théorie de la gravitation,
- les systèmes dynamiques,
- la complexité combinatoire des algorithmes.

Une étude du travail de Jones et des applications de son travail mentionnées ci-dessus composera la deuxième partie de ce cours.

B. Définitions précises

Notre but dans ce paragraphe est de mieux comprendre le sens précis du premier

point du programme de Tait. Pour atteindre ce but, il nous faut surtout préciser la terminologie utilisée. Commençons par le terme le plus essentiel du cours: Qu'est-ce qu'un nœud?

Grosso modo, pour un mathématicien, on obtient un nœud si l'on prend un bout de corde, on le noue (dans le sens usuel du terme) et puis on épisse ou colle les deux bouts de la corde ensemble. Ainsi on ne peut pas défaire le nœud simplement en tirant sur les deux bouts. Pour le défaire, on ne peut que manipuler la corde sans la couper, ni défaire l'épissure.

En termes mathématiques la définition d'un nœud est la suivante.

DÉFINITION. Un *nœud* est l'image d'un plongement du cercle dans \mathbb{R}^3 . Autrement dit, un sousensemble K de \mathbb{R}^3 est un nœud s'il existe un plongement $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Im } h = K$, où $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, le cercle de rayon 1 dans le plan $\{z = 0\}$, centré sur $(0, 0, 0)$.

RAPPEL. Une application continue $h : X \rightarrow Y$ est un *plongement* s'il existe une application continue surjective $k : \text{Im } h \rightarrow X$ telle que $kh = \text{Id}_X$ et $hk = \text{Id}_{\text{Im } h}$. Noter que si h est un plongement, alors h est une injection (i.e., $h(x) = h(x')$ seulement si $x = x'$). Ainsi, un nœud n'a pas de points multiples; il ne s'entrecoupe jamais.

Ayant établi une définition mathématiquement précise d'un nœud, il nous reste à voir ce qu'est une classification de nœuds, pour comprendre le premier point du programme de Tait. Or qui dit "classification" dans un contexte mathématique dit "relation d'équivalence". Nous définirons une notion d'équivalence de nœuds qui correspond bien à notre notion physique d'équivalence.

En langage (plus ou moins) nonmathématique, on dira que deux nœuds sont équivalents s'ils peuvent être déformés de manière continue jusqu'à se ressembler parfaitement. On peut les étirer, compresser, tordre, ou plier, mais sans les couper ou coller. La traduction mathématique précise de cette notion est la suivante.

DÉFINITION. Une *isotopie ambiante* est une application continue

$$H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

telle que

- (1) $H(-, 0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'application identité, et
- (2) pour tout t dans $[0, 1]$, $H(-, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un homéomorphisme.

Deux nœuds K et K' , correspondant aux plongements $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $h' : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sont *équivalents* (ou *isotopiques de manière ambiante*) s'il existe une isotopie ambiante $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $H(-, 1) \circ h = h'$. On écrit alors $K \sim K'$.

Ainsi, l'ensemble $\{H(-, t) \circ h : t \in [0, 1]\}$ forme une famille de nœuds qui se déforment de manière continue de K en K' . D'ailleurs il est facile de vérifier que l'on a bel et bien défini une notion d'équivalence.

DÉFINITION. Une classe d'équivalence de nœuds s'appelle un *type de nœud*. Un nœud qui appartient au même type que l'inclusion de S^1 dans \mathbb{R}^3 est dit *trivial* et dénoté \bigcirc .

REMARQUE.

- (1) A priori nous ne savons pas s'il existe d'autres types de nœud que le nœud trivial! Intuitivement nous voyons qu'il devrait y en avoir, mais comment le

démontrer? Tietze fut le premier à en démontrer rigoureusement l'existence, quand il montra en 1908 que le trèfle était noué.

- (2) En général comment peut-on démontrer que deux nœuds sont de types différents? Voilà la question principale à laquelle on essayera de répondre pendant ce cours.
- (3) Par la suite nous écrirons souvent “nœud” pour “type de nœud”, sauf là où la distinction est cruciale.

La définition d'équivalence de nœuds nous permet d'ajouter une dernière précision nécessaire et subtile à notre explication du premier point du programme de Tait. Il s'agit de préciser ce que nous entendons comme étant *tous* les nœuds.

Si nous considérons tous les plongements possibles du cercle dans \mathbb{R}^3 , nous serions confrontés à des nœuds pathologiques ou *sauvages*, par exemple des nœuds ayant un nombre infini de croisements. En général, les mathématiciens évitent ce genre de complication, en se restreignant à la classe de nœuds dits “modérés”.

DÉFINITION. Un nœud K est *polygonal* s'il existe p_1, \dots, p_n dans \mathbb{R}^3 tels que $K = \bigcup_{i=1}^n l_i$, où l_i est le segment qui va de p_i à p_{i+1} ($p_{n+1} = p_1$). Les p_i 's sont les *sommets* et les l_i 's les *arêtes* de K . Un nœud est *modéré* s'il est équivalent à un nœud polygonal.

En fait, la vaste majorité des nœuds est sauvage, mais les nœuds modérés sont ceux que l'on retrouve dans les applications qui nous intéressent. Dorénavant, le terme “nœud” vaudra dire “nœud modéré.”

C. Quelques exemples d'invariants de nœud

Maintenant que le sens du premier point du programme de Tait est clair, voyons comment procéder pour l'atteindre. Ce que nous verrons concernant la méthode d'attaque nous permettra également de comprendre le sens du deuxième point du programme de Tait.

Pour montrer que deux nœuds sont de types différents, on emploie des “boîtes magiques” qui transforment nœuds en “trucs algébriques”, tels groupes, anneaux, matrices, polynômes, nombres réels, etc. Si cette transformation s'effectuait de manière aléatoire, elle ne nous apprendrait pas grand'chose sur la nature des nœuds. Mais ces “boîtes magiques” possèdent toutes la propriété clé suivante.

DÉFINITION. Un *invariant de nœud* \mathfrak{F} associe à chaque nœud K un objet algébrique $\mathfrak{F}(K)$ de telle manière à ce que

$$K \sim K' \implies \mathfrak{F}(K) = \mathfrak{F}(K').$$

REMARQUES.

- (1) Les invariants de nœud ne distinguent pas parfaitement entre les types de nœud. Il se peut que $\mathfrak{F}(K) = \mathfrak{F}(K')$ même quand $K \not\sim K'$. Nous en verrons beaucoup d'exemples.
- (2) En général, plus il est facile de calculer les valeurs de \mathfrak{F} , moins \mathfrak{F} distinguent entre les différents types de nœud.

Nous verrons ci-dessous quelques exemples d'invariants de nœud. Ils sont tous des invariants dits *numériques*, car ils associent à chaque nœud un nombre réel. Ces invariants sont faciles à définir mais en général difficiles à calculer précisément.

Les définitions de ces invariants dépendent toutes de la représentation graphique de nœuds dans un plan, ce qui nous permet de dessiner un nœud sur une feuille de papier ou sur un tableau noir, sans être toujours obligés de manipuler de modèles tri-dimensionnels. Nous devons donc préciser comment passer du nœud en \mathbb{R}^3 à son représentation dans un plan, avant de traiter nos exemples d'invariants.

DÉFINITION. Soit $\mathfrak{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow P \subset \mathbb{R}^3$ une projection de \mathbb{R}^3 sur un plan P . Un nœud polygonal K est en *position régulière* par rapport à \mathfrak{P} si

- (1) $\#(\mathfrak{P}^{-1}(p) \cap K) \leq 2$ pour tout point p de P ;
- (2) $\#\{p \in P : \#(\mathfrak{P}^{-1}(p) \cap K) = 2\} < \infty$;
- (3) si v est un sommet de K , alors $\mathfrak{P}^{-1}(\mathfrak{P}(v)) \cap K = \{v\}$.

Ces conditions peuvent sembler très restrictives, mais en fait, comme le théorème suivant nous l'explique, un nœud polygonal est en position régulière par rapport à presque toute projection.

THÉORÈME 1.1. *Pour tout nœud polygonal et tout $\theta > 0$, il existe une droite $\ell \subset \mathbb{R}^3$, un angle $\theta' \in [0, \theta]$ et une projection \mathfrak{P} tels que la rotation de K autour de ℓ par θ' est en position régulière par rapport à \mathfrak{P} .*

PHILOSOPHIE DE LA DÉMONSTRATION. Comme K ne possède qu'un nombre fini de sommets et d'arêtes, il n'y a qu'un nombre fini de problèmes qui peuvent se poser, tandis que l'on a un nombre nondénombrable de projections parmi lesquelles on peut choisir. Il suffit, en général, de "décoller" de très peu les points multiples. \square

DÉFINITION. Une *ombre* d'un nœud K est l'image de K sous une projection par rapport à laquelle K est en position régulière. Les points doubles d'une ombre sont appelés des *croisements*.

Etant donné une ombre d'un nœud K , si l'on indique à chaque croisement lequel des deux fils passe par-dessus l'autre, on obtient un *diagramme* du type du nœud K . Le fil qui passe dessus est appelé un *passage supérieur* (ou *saut-de-mouton!*), alors que celui qui passe dessous est un *passage inférieur* (ou *passage souterrain!*). Un *arc* du diagramme est une courbe continue qui va d'un passage inférieur au prochain passage inférieur, peut-être en traversant des passages supérieurs.

REMARQUE. Il existe une infinité de diagrammes correspondant à chaque type de nœud. D'ailleurs le nombre de croisements d'un diagramme d'un type de nœud n'est pas borné.

C.1 Le nombre de croisement $\mathfrak{c}(K)$.

Le premier invariant numérique que nous considérons était déjà connu de Tait. C'est en fait au moyen de cet invariant, qui mesure d'une manière naturelle la "complexité" du nœud, qu'il voulut établir son hiérarchie de nœuds.

DÉFINITION. Le *nombre de croisement* d'un (type de) nœud K , dénoté $\mathfrak{c}(K)$, est le minimum sur tous les diagrammes D de K du nombre de croisements de D , dénoté $\mathfrak{c}(D)$. Un diagramme de K dont le nombre de croisements est exactement $\mathfrak{c}(K)$ est dit *minimal*.

Tait réussit à classer tous les nœuds K tels que $\mathfrak{c}(K) < 8$, mais sans preuve rigoureuse. Il basa ses résultats sur des "Principes" de classification de diagrammes de nœud. Or ces "Principes" étaient des conjectures profondes, dont certaines n'ont été démontrées que tout récemment.

C.2 Le nombre de dénouement $u(K)$.

Le deuxième invariant est encore plus difficile à calculer que le premier, bien qu'il corresponde très bien à notre notion intuitive de la complexité d'un nœud.

DÉFINITION. Le *nombre de dénouement* d'un (type de) nœud K , dénoté $u(K)$, est le minimum sur tous les diagrammes D de K du plus petit nombre de croisements de D qu'il faut changer pour obtenir le nœud trivial.

REMARQUE. Il existe des nœuds pour lesquels le nombre dénouement est atteint dans un diagramme nonminimal. Bleiler en trouva un exemple en 1984.

Nous pouvons quand même borner $u(K)$ en termes de $c(K)$.

PROPOSITION 1.2. $u(K) \leq c(K)/2$.

PREUVE. A faire comme exercice.

C.3 Le nombre de pont $b(K)$.

Ce troisième invariant est peut-être le moins utilisé des trois, mais est tout de même un invariant important. Un grand nombre de mathématiciens ont étudié le problème de la classification de tous les nœuds de nombre de pont fixe.

DÉFINITION. Un *pont* dans un diagramme de nœud consiste en une suite de sauts-de-mouton.

DÉFINITION. Le *nombre de pont* d'un (type de) nœud K , dénoté $b(K)$, est le minimum sur tous les diagrammes D de K du nombre de ponts de longueur maximale de D . On pose $b(\bigcirc) = 1$.

REMARQUE. Le nombre de ponts de longueur maximale d'un diagramme est égal au nombre d'arcs qui traverse au moins un saut-de-mouton.

Le nombre pont, ainsi que les deux invariants précédents, nous servent de tests parfaits de trivialité.

PROPOSITION 1.3. *Soit K un nœud. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (1) $K \sim \bigcirc$;
- (2) $c(K) = 0$;
- (3) $u(K) = 0$;
- (4) $b(K) = 1$.

PREUVE. L'équivalence entre (1) et (2) est évidente: Tout diagramme sans croisements est facilement déformable en cercle. L'équivalence entre (1) et (3) est également triviale: Si l'on n'est obligé d'effectuer aucun changement de croisement pour obtenir un diagramme du nœud trivial, alors le nœud est déjà trivial.

L'implication (1) \Rightarrow (4) est vraie par définition. Pour voir que le contraire est également vrai, supposer que K soit un nœud tel que $b(K) = 1$. Si $c(K) \leq 2$, alors $c(K) = 0$ et donc $K \sim \bigcirc$. On peut donc supposer que $c(K) \geq 3$ et essayer de montrer que l'on aboutit forcément à une contradiction.

Considérer un diagramme minimal de K . Puisque $b(K) = 1$, tout arc du diagramme autre que le (seul) pont de longueur maximale va directement de passage souterrain en passage souterrain, sans traverser aucun saut-de-mouton. Alors on est forcément dans la situation dessinée ci-dessous.

On peut donc éliminer ces deux croisements par des déformations continues, ce qui contredit la minimalité du diagramme. \square

D. Classes spéciales de nœud

Dans ce paragraphe nous verrons comment faire certaines distinctions qualitatives entre les nœuds, sans parler d'invariants précis.

D.1 Nœuds chiraux et amphichiraux.

Puisque l'emplacement relatif des croisements d'un diagramme de nœud détermine la nature du nœud, il est naturel de se demander ce qui se passe si l'on les change *tous*. Est-ce que le nouveau diagramme peut être d'une nature radicalement différente?

DÉFINITION. Soit D un diagramme de nœud. Si l'on inverse tous les croisements de D , on obtient son *image miroir*, que l'on dénote $D^!$.

Il est naturel de vouloir savoir quelle est la relation entre le type de nœud représenté par D et celui représenté par $D^!$.

DÉFINITION. Soit K un nœud, et soit P un plan dans \mathbb{R}^3 . Une *image miroir* de K par rapport à P est l'image de K sous réflexion dans le plan P .

Si D est un diagramme de K obtenu de son ombre sur un plan P , alors $D^!$ est un diagramme de l'image miroir de K par rapport à P .

Il est facile de voir que les images miroir de K par rapport à deux plans différents sont toujours équivalentes. Ainsi on peut parler de *l'image miroir d'un type de nœud* K , noté $K^!$, comme étant le type d'une des images miroir d'un représentant de K .

DÉFINITION. Un nœud est dit *amphichiral* s'il est équivalent à son image miroir. Si un nœud n'est pas amphichiral, alors il est *chiral*.

Bien que Tait soupçonnât que le trèfle fût chiral, il n'arriva pas à le démontrer. Il a fallu attendre 1914 et la démonstration de quelques 90 pages de Dehn pour en avoir la certitude. Aujourd'hui, grâce au polynôme de Jones, nous pouvons démontrer la chiralité du trèfle en quelques lignes!

D.2 Nœuds inversibles.

Souvent nous considérerons des diagrammes de nœud munis d'une *orientation*, i.e., un choix de direction de mouvement quand on suit les courbes du diagramme. Autrement dit, on choisit une direction sur le cercle—dans le sens des aiguilles d'une montre ou le contraire—et on considère la direction induite sur le nœud par son plongement associé du cercle dans \mathbb{R}^3 .

Comme il est naturel de choisir une direction de mouvement sur un nœud, on peut se demander quel peut être l'effet de ce choix. Telle est la motivation de la définition suivante.

DÉFINITION. Un nœud associé à un plongement $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est *inversible* s'il existe une isotopie ambiante $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\text{Im } H(-, 1) \circ h = \text{Im } h$, mais étant donné une orientation de S^1 , alors l'orientation induite par h est l'inverse de celle induite par $H(-, 1) \circ h$.

Trotter découvrit les premiers nœuds noninversibles en 1964, quand il en construisit une famille infinie.

D.3 Nœuds alternatifs.

Dans ses recherches, Tait se rendit compte de l'importance de la dernière classe de nœuds dont nous allons parler ici. Plusieurs de ses "Principes" de travail concernent des propriétés des nœuds alternatifs, en particulier par rapport aux nœuds chiraux.

Plus tard, quand nous aurons les moyens de démontrer certaines des "Principes" de Tait, nous comprendrons mieux toute l'importance de cette classe. Pour l'instant nos observations des nœuds de petit nombre croisement nous amènent naturellement à la considérer.

DÉFINITION. Un diagramme de nœud est *alternatif* si l'on rencontre passages supérieurs et inférieurs en alternance quand on suit la trace du diagramme. Un type de nœud est *alternatif* s'il possède un diagramme alternatif.

Tous les nœuds dont le nombre de croisement est au plus 7 sont alternatifs. Crowell et Murasugi découvrirent le premier nœud nonalternatif en 1957.