L'EXISTENCE DU POLYNÔME UNIVERSEL

Nous ferons appel dans ici à notre connaissance, non seulement de l'algèbre de Hecke et de sa trace, mais aussi du groupe des tresses et des liens entre les tresses et les entrelacs. Les tresses serviront de pont entre le monde algébrique du dernier chapitre et le monde topologique des entrelacs, nous permettant de définir le polynôme universel.

La première étape de la construction du polynôme universel consiste en la définition d'un invariant de tresse, qui, de première vue, a l'air trop horrible pour mener à quelque chose de raisonnable. Or un changement de variables astucieux nous permettra de voir que cet invariant de tresses n'est qu'une version déguisée du polynôme universel.

Nous terminerons ce chapitre par une petite étude comparative du polynôme universel, du polynôme d'Alexander et du polynôme de Jones.

A. La construction du polynôme universel

Avant de définir l'invariant de tresse à la base du polynôme universel, nous devons établir quelques repères algébriques.

Considérer l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[q,z]$ en deux variables, q et z. Dorénavant $\mathbb{k}$ dénotera le corps des fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$, i.e.,

$$\mathbb{k} = \left\{ \tfrac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{C}[q,z] \right\}.$$

Poser $w = 1-q+z \in \mathbb{k}$, et soit $\mathbb{F} = \mathbb{k}\left((\frac{q}{zw})^{\frac{1}{2}} \right)$, i.e., $\mathbb{F}$ est le corps qui est l'extension quadratique de $\mathbb{k}$ par $(\frac{q}{zw})^{\frac{1}{2}}$.

Il est clair d'après les présentations de $\mathcal{B}_n$ et de $\mathcal{H}_n(q)$ qu'il existe une surjection d'algèbres

$$\rho : \mathbb{k}[\mathcal{B}_n] \longrightarrow \mathcal{H}_n(q)$$

telle que $\rho(\sigma_i) = \tau_i$ pour tout i. Ceci entraîne en particulier que τ_i doit être inversible dans $\mathcal{H}_n(q)$, puisque σ_i l'est dans $\mathcal{B}_n$. Effectivement,

$$\tau_i \cdot \frac{1}{q} \cdot (1-q+\tau_i) = \frac{1}{q} \cdot (\tau_i - q\tau_i + \tau_i^2) = \frac{1}{q} \cdot (\tau_i - q\tau_i + (q-1)\tau_i + q) = 1,$$

i.e., τ_i est inversible, et $\tau_i^{-1} = \frac{1}{q} \cdot (1-q+\tau_i)$.

Comme dernier repère algébrique, soit $\nu : \mathcal{B}_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'homomorphisme défini par $\nu(\sigma_i) = 1$ pour tout i. Cet homomorphisme est bien défini, car

$$\nu(\sigma_i) + \nu(\sigma_j) = 2 = \nu(\sigma_j) + \nu(\sigma_i) \quad \forall i, j$$

et

$$\nu(\sigma_i) + \nu(\sigma_{i+1}) + \nu(\sigma_i) = 3 = \nu(\sigma_{i+1}) + \nu(\sigma_i) + \nu(\sigma_{i+1}) \quad \forall i.$$

Ayant fixé ces repères, nous sommes prêts à définir notre invariant de tresse.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{n\geq 2} \mathcal{B}_n$. *L'invariant de tresse universel* est une application ensembliste

$$\mathcal{X} : \mathcal{B} \to \mathbb{F}$$

définie par

$$\mathcal{X}(b) = \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+\nu(b)-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-\nu(b)-1)/2} \cdot Tr\left(\rho(b)\right),$$

pour tout $b \in \mathcal{B}_n$.

REMARQUE. Pour vérifier que $\mathcal{X}(b)$ se trouve vraiment dans $\mathbb{F}$, observer que

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{(n+\nu(b)-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-\nu(b)-1)/2} = \left[\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n+\nu(b)-1} \cdot \left(\frac{q}{w}\right)^{-\nu(b)} \in \mathbb{F}$$

pour tout $b \in \mathcal{B}_n$.

De première vue, il paraît invraisemblable et presque miraculeux que cette définition affreuse puisse nous mener au beau polynôme universel, mais nous verrons par la suite que tel est en fait le cas. Il nous faut montrer que $\mathcal{X}$ induit un invariant d'entrelacs, qui, après un changement de base approprié, prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$ et satisfait à la relation d'écheveau à coefficients u, u^{-1}, v.

Pour montrer que $\mathcal{X}$ induit un invariant d'entrelacs, nous ferons appel au théorème de Markov (Théorème 7.4), qui précise quand les fermetures de deux tresses sont équivalentes.

PROPOSITION 1. *Si $\mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(b')$, alors $\mathcal{X}(b) = \mathcal{X}(b')$.*

PREUVE. Le théorème de Markov implique qu'il suffit de vérifier les deux affirmations suivantes.

(1) $\mathcal{X}(b) = \mathcal{X}(cbc^{-1}) \quad \forall b, c \in \mathcal{B}_n$.
(2) $\mathcal{X}(b) = \mathcal{X}(b\sigma_n^{\pm 1}) \quad \forall b \in \mathcal{B}_n$.

Preuve de (1): Observer d'abord que

$$\nu(cbc^{-1}) = \nu(c) + \nu(b) + \nu(c^{-1}) = \nu(b),$$

car $\nu(c^{-1}) = -\nu(c)$ pour tout $c \in \mathcal{B}_n$. Ensuite, grâce à la propriété (2) de la trace (voir chapitre IX, paragraphe C),

$$\begin{aligned} Tr\left(\rho(cbc^{-1})\right) &= Tr\left(\rho(c)\rho(b)\rho(c)^{-1}\right) \\ &= Tr\left(\rho(c)^{-1}\rho(c)\rho(b)\right) \\ &= Tr\left(\rho(b)\right). \end{aligned}$$

Puisque b et cbc^{-1} ont le même nombre de brins, les deux calculs ci-dessus montrent que $\mathcal{X}(b) = \mathcal{X}(cbc^{-1})$.

Preuve de (2): On voit facilement que

$$\frac{1}{2}\left((n+1)+\nu(b\sigma_n)-1\right)=\frac{1}{2}(n+\nu(b)-1)+1$$

et

$$\frac{1}{2}\left((n+1)-\nu(b\sigma_n)-1\right)=\frac{1}{2}(n-\nu(b)-1).$$

D'ailleurs, $\rho(b\sigma_n)=\rho(b)\cdot\tau_n$, ce qui implique que $Tr\left(\rho(b\sigma_n)\right)=z\cdot Tr\left(\rho(b)\right)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(b\sigma_n)&=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{(n+\nu(b)-1)/2}\left(\frac{q}{w}\right)^{(n-\nu(b)-1)/2}z\cdot Tr\left(\rho(b)\right)\\&=\mathcal{X}(b).\end{aligned}$$

De manière semblable, on voit que

$$\frac{1}{2}\Big((n+1)+\nu(b\sigma_n^{-1})-1\Big)=\frac{1}{2}(n+\nu(b)-1)$$

et

$$\frac{1}{2}\Big((n+1)-\nu(b\sigma_n^{-1})-1\Big)=\frac{1}{2}(n-\nu(b)-1)+1,$$

tandis que

$$\rho(b\sigma_n^{-1})=\rho(b)\tau_n^{-1}=\frac{1}{q}\rho(b)(1-q+\tau_n).$$

Donc

$$\begin{aligned}Tr\left(\rho(b\sigma_n^{-1})\right)&=\frac{1}{q}\left[Tr\left(\rho(b)\right)-q\cdot Tr\left(\rho(b)\right)+z\cdot Tr\left(\rho(b)\right)\right]\\&=\frac{w}{q}\cdot Tr\left(\rho(b)\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(b\sigma_n^{-1})&=\left(\frac{1}{z}\right)^{(n+\nu(b)-1)/2}\left(\frac{q}{w}\right)^{(n-\nu(b)-1)/2}\frac{q}{w}\frac{w}{q}\cdot Tr\left(\rho(b)\right)\\&=\mathcal{X}(b).\quad\square\end{aligned}$$

Grâce à cette proposition, nous savons que l'application

$$\widetilde{\mathcal{X}}:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathbb{F}:D\mapsto\mathcal{X}(b),$$

est bien définie, où D est un diagramme du type d'entrelacs de $\mathcal{L}(b)$. Notre prochain but est de montrer que $\widetilde{\mathcal{X}}$ est un invariant d'écheveau. Les coefficients de sa relation d'écheveau nous indiqueront le changement de base qu'il faudra effectuer pour trouver le polynôme universel.

Observer d'abord que par définition $\widetilde{\mathcal{X}}(D)=\widetilde{\mathcal{X}}(D')$, si D et D' sont deux diagrammes du même type de nœud. Il s'agit bien d'un invariant.

Ensuite, puisque $\bigcirc \sim \mathcal{L}(\sigma_{1,2})$, on a que

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{X}}(\bigcirc) &= \mathcal{X}(\sigma_{1,2}) \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)^{(2+1-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(2-1-1)/2} \cdot Tr(\tau_1) \\ &= \frac{1}{z} \cdot z \\ &= 1,\end{aligned}$$

i.e., la condition (1) de la définition d'un invariant d'écheveau est satisfaite par $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Il reste donc à trouver une relation d'écheveau satisfaite par $\widetilde{\mathcal{X}}$. Commençons par une digression concernant les triplés d'écheveau et les tresses.

Soient $b \in \mathcal{B}_n$ et $k \in \{1, ..., n-1\}$. Soient D un diagramme de $\mathcal{L}(b\sigma_k^{-1})$, D' un diagramme de $\mathcal{L}(b\sigma_k)$, et D'' un diagramme de $\mathcal{L}(b)$. Alors il est clair que (D, D', D'') est un triplé d'écheveau.

D'ailleurs, si (D_+, D_-, D_0) est un triplé d'écheveau et D_0 est un diagramme du type d'entrelacs de $\mathcal{L}(b)$ pour un certain $b \in \mathcal{B}_n$, alors il existe $k \in [1, n]$ tel que D_+ soit un diagramme du type d'entrelacs de $\mathcal{L}(b\sigma_k^{-1})$ et D_- soit un diagramme du type d'entrelacs de $\mathcal{L}(b\sigma_k)$.

Etant donné cette équivalence, nous comprenons bien l'intérêt du lemme suivant.

Lemme 2 (Le lemme d'invariance). *Soit $\mathcal{W}$ l'application $\mathcal{B}_n \to \mathcal{H}_n(q)$ définie par*

$$\mathcal{W}(b) = \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+\nu(b)-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-\nu(b)-1)/2} \cdot \rho(b).$$

Alors pour tout $b \in \mathcal{B}_n$ et $k \in \{1, ..., n-1\}$,

$$w\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{W}(b\sigma_k^{-1}) - z\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{W}(b\sigma_k) + (q-1)\mathcal{W}(b) = 0.$$

La preuve de ce lemme, qui consiste en un calcul tout à fait direct basé sur la définition de $\mathcal{W}$, est laissée comme exercice.

Puisque $\mathcal{X}(b) = Tr\,(\mathcal{W}(b))$, notre analyse des triplés d'écheveau nous montre que le corollaire suivant est une conséquence immédiate du lemme 2.

Corollaire 3. *Pour tout triplé d'écheveau (D_+, D_-, D_0),*

$$w\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathcal{X}}(D_+) - z\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathcal{X}}(D_-) + (q-1)\widetilde{\mathcal{X}}(D_0) = 0.$$

Ainsi, nous avons démontré que $\widetilde{\mathcal{X}}$ est un invariant d'écheveau à coefficients $\left(w\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}}, -z\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}}, q-1\right)$. Nous laissant guider par la définition de $\mathcal{Q}$ à partir de celle de $\widetilde{\mathcal{Q}}$, nous posons

$$\begin{aligned}u(q,z) &= \left(w\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-z\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= i\left(\frac{w}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}v(q,z) &= \left(w\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-z\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}(q-1)\\ &= i(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Alors $u(q,z), v(q,z) \in \mathbb{F}$, car ce sont des produits d'éléments de $\mathbb{F}$. D'ailleurs,

$$w\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{w}{z}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = -iq^{\frac{1}{2}} \cdot u(q,z),$$

$$-z\left(\frac{q}{wz}\right)^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{z}{w}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = -iq^{\frac{1}{2}} \cdot u(q,z)^{-1},$$

et

$$q-1 = -iq^{\frac{1}{2}} \cdot v(q,z).$$

Donc, si nous multiplions l'équation du corollaire 3 par $iq^{-\frac{1}{2}}$, nous obtenons

$$(\triangle) \qquad u(q,z)\cdot \widetilde{\mathcal{X}}(D_+) + u(q,z)^{-1}\cdot \widetilde{\mathcal{X}}(D_-) + v(q,z)\cdot \widetilde{\mathcal{X}}(D_0) = 0,$$

pour tout triplé d'écheveau (D_+, D_-, D_0). Grâce à la relation $(\triangle)$, nous pouvons démontrer la proposition importante suivante.

Proposition 4. *Soit $D \in \mathfrak{D}$. Alors $\widetilde{\mathcal{X}}(D)$ est un polynôme de Laurent en $u(q,z)$ et $v(q,z)$.*

Preuve. Comme toujours, nous démontrerons ce résultat par récurrence sur la complexité du diagramme.

Si $\mathfrak{c}(D) = 0 = \mathfrak{u}(D)$ et D a r composantes, alors $D \sim \bigcirc^r$. Grâce à la relation $(\triangle)$, le lemme 8.2 implique que

$$\widetilde{\mathcal{X}}(D) = \left(-\frac{u(q,z)+u(q,z)^{-1}}{v(q,z)}\right)^{r-1},$$

ce qui est un polynôme de Laurent en $u(q,z)$ et $v(q,z)$.

Supposons que la proposition soit vraie pour tout diagramme de complexité inférieure à (n,m). Soit D un diagramme tel que $(\mathfrak{c}(D), \mathfrak{u}(D)) = (n,m)$. Comme toujours, on peut supposer que l'un des croisements à inverser dans une trivialisation minimale soit positif et en tirer un triplé d'écheveau (D, D_-, D_0), où les complexités de D_- et D_0 sont inférieures à (n,m). Ainsi, par $(\triangle)$,

$$\widetilde{\mathcal{X}}(D) = -u(q,z)^{-2}\widetilde{\mathcal{X}}(D_-) + -u(q,z)^{-1}v(q,z)\widetilde{\mathcal{X}}(D_0),$$

ce qui est un polynôme Laurent en $u(q,z)$ et $v(q,z)$, parce que $\widetilde{\mathcal{X}}(D_-)$ et $\widetilde{\mathcal{X}}(D_0)$ le sont, par l'hypothèse de récurrence. □

Puisque $\mathbb{F}$ est un corps,

$$u(q,z)^k v(q,z)^l = 1 \Longleftrightarrow k = 0 = l.$$

Ainsi il y a un vrai anneau de polynômes de Laurent

$$\mathbb{Z}[u(q,z), u(q,z)^{-1}, v(q,z), v(q,z)^{-1}]$$

inclus dans $\mathbb{F}$. Ce que nous venons de montrer dans la proposition précédente est donc que

$$\widetilde{\mathcal{X}}(D) \in \mathbb{Z}[u(q,z), u(q,z)^{-1}, v(q,z), v(q,z)^{-1}] \quad \forall D \in \mathfrak{D}.$$

Par conséquent, nous pouvons regarder $\widetilde{\mathcal{X}}(D)$ comme une fonction de $u(q,z)$ et $v(q,z)$, au lieu de q et z. Considéré ainsi, $\widetilde{\mathcal{X}}$ est un invariant d'écheveau dont l'image se trouve dans l'anneau de polynômes de Laurent en u et v et dont les coefficients sont u, u^{-1}, v, i.e., $\widetilde{\mathcal{X}}$ considéré comme une fonction de $u(q,z)$ et $v(q,z)$ est exactement le polynôme universel!

Nous résumons ce qui précède sous forme d'un théorème.

Théorème 5. *Le polynôme universel $\mathcal{Q}$ existe, et est égal à l'invariant d'écheveau induit par l'invariant de tresse universel, après un changement de variables approprié.*

B. Les polynômes d'Alexander et de Jones

La famille des invariants d'écheveau possède deux membres renommés. Nous en connaissons déjà bien un, le fameux polynôme de Jones, lequel était l'étincelle qui a relancé l'étude de la théorie des nœuds, provocant la véritable explosion de ce domaine de recherche depuis 1984. L'autre est le polynôme d'Alexander-Conway, connu de très longue date.

Dans ce paragraphe nous verrons comment obtenir ces deux polynômes à partir du polynôme universel.

Le polynôme d'Alexander-Conway: Il y a une variante légèrement modifié du polynôme d'Alexander, appelé le polynôme d'Alexander-Conway, qui satisfait à la relation d'écheveau suivante.

$$(\diamondsuit) \qquad \nabla_{D_+}(t) - \nabla_{D_-}(t) - t\nabla_{D_0}(t) = 0.$$

Ainsi $\nabla : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{Z}[t]$ est un invariant d'écheveau à coefficients $1, -1, t$, ce qui entraîne que $\nabla = f \circ \widetilde{\mathcal{Q}}$, où

$$f : \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[t] : \begin{cases} x & \mapsto 1 \\ y & \mapsto -1 \\ z & \mapsto -t. \end{cases}$$

Puisque $\mathcal{Q}$ s'obtient de $\widetilde{\mathcal{Q}}$ par la substitution $u = x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$, $v = (xy)^{-\frac{1}{2}} z$, il est clair que

$$\nabla_D(t) = \mathcal{Q}(D)(-i, it).$$

D'ailleurs si nous substituons ces valeurs de u et v dans la relation d'écheveau de $\mathcal{Q}$, nous obtenons

$$-i\mathcal{Q}(D_+) + i\mathcal{Q}(D_-) + it\mathcal{Q}(D_0) = 0.$$

Si nous multiplions cette équation par i, nous retrouvons ($\diamondsuit$).

Le polynôme de Jones: Jones a défini son "polynôme"

$$\mathcal{V} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$$

à partir d'une certaine représentation des groupes de tresses. Il a très vite reconnu que $\mathcal{V}$ satisfaisait à une relation d'écheveau. En particulier, si (D_+, D_-, D_0) est un triplé d'écheveau, alors

$$t\mathcal{V}(D_+) - t^{-1}\mathcal{V}(D_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\mathcal{V}(D_0).$$

Donc $\mathcal{V} = f \circ \widetilde{\mathcal{Q}}$, où

$$f : \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}] : \begin{cases} x & \mapsto t \\ y & \mapsto -t \\ z & \mapsto (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Le même genre de raisonnement que dans le cas du polynôme d'Alexander montre alors que $\mathcal{V}(D)(t) = \mathcal{Q}(D)(-it, -i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}))$.

Si l'on utilise le polynôme de Jones, on peut démontrer en deux lignes que les deux trèfles ne sont pas équivalents.

Les relations entre $\mathcal{Q}$, ∇, et $\mathcal{V}$: Les polynômes d'Alexander et de Jones sont déterminés par le polynôme universel, mais il n'y pas d'autre relation de dépendance parmi ces polynômes.

- Le polynôme d'Alexander-Conway ne détermine pas le polynôme de Jones, car il existe un nœud, appelé 11_{471}, tel que $\nabla_{11_{471}} = 1$ tandis que $\mathcal{V}(11_{471}) \neq 1$. En fait, jusqu'à ce jour il n'y a pas d'exemple connu de nœud nontrivial dont le polynôme de Jones est 1.
- Le polynôme de Jones ne détermine pas le polynôme d'Alexander-Conway, car il existe deux nœuds, 4_1 (le nœud en huit) et 11_{388}, tels que $\mathcal{V}(4_1) = \mathcal{V}(11_{388})$ tandis que $\nabla_{4_1} \neq \nabla_{11_{388}}$.
- Les polynômes d'Alexander-Conway et de Jones pris ensemble ne suffisent pas pour déterminer le polynôme universel, car $\mathcal{V}(11_{388}) = \mathcal{V}(11^!_{388})$ et $\nabla_{11_{388}} = \nabla_{11^!_{388}}$, mais $\mathcal{Q}(11_{388}) \neq \mathcal{Q}(11^!_{388})$.

Ainsi les polynômes d'Alexander-Conway et de Jones sont deux invariants puissants et complémentaires. Néanmoins, le polynôme universel qui les détermine contient encore plus d'information que les polynômes d'Alexander-Conway et de Jones réunis.