

LES TRESSES

Nous étudierons dans ce chapitre les tresses mathématiques, dont la définition, tout comme celle des nœuds mathématiques, est une abstraction des caractéristiques essentiels de certains vrais objets physiques.

Les tresses nous intéressent principalement à cause des liens étroits qui existent entre la théorie des tresses et celle des entrelacs (voir le paragraphe C). En particulier nous verrons comment appliquer la théorie des tresses au calcul du groupe fondamental du complément d'un entrelacs (Théorème 6). De plus, lors de notre preuve de l'existence du polynôme HOMFLY, qui commencera dans le chapitre suivant, nous exploiterons à fond le lien entre les tresses et les entrelacs.

La théorie des tresses est même très intéressante en soi, car l'ensemble des tresses au nombre de brins fixe possède une structure naturelle de groupe (à une certaine relation d'équivalence près). Nous verrons une belle présentation de ce groupe (Théorème 2), et nous établirons qu'il est isomorphe à un certain sousgroupe du groupe des automorphismes d'un groupe libre (Théorème 3).

A. Introduction aux entrelacs et aux tresses

Dans ce paragraphe nous précisons ce que nous entendons par une “tresse” en langage mathématique, pour étudier après la structure du groupe des tresses à n brins, noté \mathcal{B}_n . Nous terminons ce paragraphe en précisant une présentation de \mathcal{B}_n .

A.1 La définition de \mathcal{B}_n .

Tout le monde sait ce qu'est une tresse, et presque tout le monde sait en fabriquer une. Une tresse mathématique est une version abstraite tout à fait reconnaissable d'une tresse de cheveu—ou de pain!

DÉFINITION. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une *tresse à n brins* consiste en une permutation τ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et n chemins $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1] \times [0, 1]$, où $1 \leq i \leq n$, tels que pour tout i ,

- (1) $\alpha_i(0) = (i, 0, 1)$ et $\alpha_i(1) = (\tau(i), 0, 0)$;
- (2) si $0 \leq s < t \leq 1$, alors la z -coordonnée de $\alpha_i(s)$ est plus grande que la z -coordonnée de $\alpha_i(t)$, i.e., α_i descend strictement; et
- (3) si $i \neq j$, alors $\alpha_i([0, 1]) \cap \alpha_j([0, 1]) = \emptyset$, i.e., deux brins distincts ne s'entrecoupent jamais.

On appelle τ la *permutation de la tresse* et chaque α_i un *brin* de la tresse.

Comme dans d'autres contextes mathématiques, le problème de classification est de grand intérêt lorsqu'il s'agit de tresses. Or qui dit classification, dit relation d'équivalence! Puisque nous voulons profiter plus tard des liens entre la théorie

des tresses et celle des entrelacs, il faut que la relation d'équivalence que nous établissons sur l'ensemble des tresses soit de la même nature que celle définie sur l'ensemble des entrelacs.

Nous verrons par la suite que la définition suivante est non seulement celle qui correspond à notre intuition physique, mais aussi celle qui permet de relier les classes d'équivalence de tresses aux classes d'équivalence d'entrelacs.

DÉFINITION. Deux tresses à n brins, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, sont *équivalentes*, noté $\alpha \sim \beta$, si elles ont la même permutation τ et s'il existe une isotopie ambiante

$$H : (\mathbb{R} \times [0, 1] \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1] \times [0, 1]$$

telle que

- (1) pour tout $t \in [0, 1]$, la restriction de $H(\cdot, t)$ à $\mathbb{R} \times [0, 1] \times \{0, 1\}$ est l'identité, donc les bouts des tresses sont fixés et pour tout $t \in [0, 1]$, $\{H(\cdot, t) \circ \alpha_1, \dots, H(\cdot, t) \circ \alpha_n\}$ sont les brins d'une tresse à permutation τ ; et
- (2) $H(\cdot, 1) \circ \alpha_i = \beta_i$ pour tout i .

Une classe d'équivalence de tresses est appelée un *type de tresse*. L'ensemble de tous les types de tresses à n brins est noté \mathcal{B}_n .

CONVENTION NOTATIONNELLE. Nous utiliserons des minuscules grecques pour dénoter des tresses et des minuscules latines pour dénoter des types de tresse. Une minuscule grecque avec un nombre naturel comme indice sera un brin de la tresse dont le nom est la minuscule grecque.

Il est assez facile de voir que tout type de tresse contient au moins une tresse dont les brins sont des chemins polygonaux, appelée une *tresse polygonale*. Cela nous permet de dire, par un argument de "petites perturbations", que tout type de tresse contient au moins une tresse polygonale dont la projection sur le plan $\{y = 0\}$ est régulière. C'est-à-dire, les seuls points multiples de la projection sont des points doubles, dont il n'existe qu'un nombre fini et dont aucun n'est l'image d'un sommet.

Un *diagramme* d'un type de tresse b est donc l'image sous la projection régulière sur le plan $\{y = 0\}$ d'une tresse polygonale qui appartient à b , où l'on a indiqué à chaque point double lequel des deux fils passe dessus, employant la même convention que dans les diagrammes de nœud.

A.2 La structure de groupe de \mathcal{B}_n .

Pour spécifier une structure de groupe sur \mathcal{B}_n , nous commençons par définir le produit de deux tresses à n brins. Ensuite nous vérifierons que le produit de tresses induit un produit de types de tresse, qui satisfait aux axiomes de groupe.

La définition du produit de deux tresses est naturelle et géométrique, dérivée de la définition du produit $f \star g$ de deux chemins $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ tels que $f(1) = g(0)$ par concatenation. Souvenons-nous que

$$f \simeq_* f', g \simeq_* g' \implies f \star f' \simeq_* g \star g'$$

et que

$$(f \star g) \star h \simeq_* f \star (g \star h),$$

lorsque $f(1) = g(0)$ et $g(1) = h(0)$.

Soient $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ deux tresses, aux permutations σ et τ , respectivement. Alors on définit

$$\alpha \star \beta = \{(\alpha_1 + (0, 0, 1)) \star \beta_{\sigma(1)}, \dots, (\alpha_n + (0, 0, 1)) \star \beta_{\sigma(n)}\},$$

qui est évidemment une tresse à n brins et à permutation $\tau \circ \sigma$. Observer que chaque brin est bien défini, car

$$(\alpha_i + (0, 0, 1))(1) = \alpha_i(1) + (0, 0, 1) = (\sigma(i), 0, 1) = \beta_{\sigma(i)}(0).$$

Plus informellement, on doit d'abord translater la tresse α d'une unité vers le haut, ensuite coller les bouts en bas de α aux bouts en haut de β , et enfin changer d'échelle dans la direction verticale par un facteur de $\frac{1}{2}$.

Maintenant une preuve semblable à celle pour les chemins montre que

$$\alpha \sim \alpha', \quad \beta \sim \beta' \implies \alpha \star \beta \sim \alpha' \star \beta'.$$

Ainsi la définition suivante est indépendante des représentants choisis. Soient a et b deux types de tresse à n brins. Soient $\alpha \in a$ et $\beta \in b$. Définir

$$ab = [\alpha \star \beta].$$

PROPOSITION 1. *Le produit défini ci-dessus dote l'ensemble \mathcal{B}_n d'une structure de groupe*

PREUVE. Nous devons vérifier que

- (1) le produit est associatif;
- (2) il existe une identité multiplicative; et
- (3) chaque élément de \mathcal{B}_n possède un inverse multiplicatif.

Preuve de (1): Tout à fait semblable à la preuve que la multiplication dans le groupe fondamental soit associative.

Preuve de (2): Pour tout $i \in \mathbb{N}$, définir

$$\varepsilon_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1] \times [0, 1] : t \mapsto (i, 0, 1 - t).$$

Ainsi $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ est une tresse à n brins, dont les brins ne font que de descendre tout droit. Il est clair que le type de ε , noté e_n , sera l'élément neutre de \mathcal{B}_n .

Preuve de (3): Souvenons-nous que si $f : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin dans un espace X quelconque, alors on définit $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$ par $f^{-1}(t) = f(1 - t)$ et $f \star f^{-1} \simeq_* c_{f(0)}$.

Soit $a \in \mathcal{B}_n$, et soit $\alpha \in a$. Pour chaque brin, écrire $\alpha_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3)$. Soit $\tilde{\alpha}$ la tresse à n brins et à permutation τ^{-1} telle que

$$\tilde{\alpha}_i = \left((\alpha_{\tau^{-1}(i)}^1)^{-1}, (\alpha_{\tau^{-1}(i)}^2)^{-1}, 1 - (\alpha_{\tau^{-1}(i)}^3)^{-1} \right).$$

Alors essentiellement la même démonstration que dans le cas du groupe fondamental montre que $a[\tilde{\alpha}] = e_n$, i.e.,

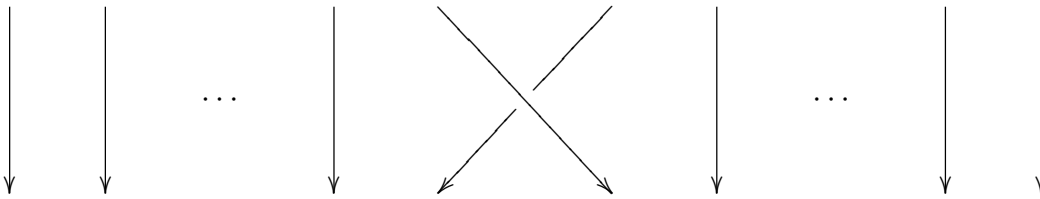
$$a^{-1} = [\tilde{\alpha}].$$

Observer que $\tilde{\alpha}$ est le reflet de α dans le plan $\{z = 0\}$. \square

REMARQUE. Le groupe \mathcal{B}_n est en fait le groupe fondamental d'un espace appelé *l'espace de configurations* (de n points dans \mathbb{R}^3). Ce fait explique pourquoi la définition et vérification de la structure de groupe de \mathcal{B}_n ressemblent tant à celles que nous avons déjà vues quand nous avons étudié le groupe fondamental. Dans ce chapitre, nous avons choisi une approche plus intuitive du groupe \mathcal{B}_n , mais l'autre approche peut aussi être très utile.

Il y a une classe de types de tresse particulièrement simples, telle que tout type de tresse s'écrit comme un produit d'éléments de cette classe. Autrement dit, ces types simples engendrent \mathcal{B}_n . Voyons lesquels ils sont, pourquoi ils engendrent \mathcal{B}_n , et quelles peuvent être les relations entre eux.

Pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, soit $\sigma_{i,n}$ le type de tresse dont un représentant est la tresse dont tous les brins sont constants (i.e., descendent tout droit), sauf le $i^{\text{ème}}$ et le $(i + 1)^{\text{ème}}$, qui se croisent une fois, avec le $i^{\text{ème}}$ passant devant le $(i + 1)^{\text{ème}}$.



Le type $\sigma_{i,n}$ s'appelle un type de tresse *élémentaire*. Observer qu'il s'agit d'un type de tresse à permutation $(i \ i + 1)$.

NOTATION. Souvent, quand il n'y a pas d'ambiguïté concernant le nombre de brins, nous écrirons σ_i à la place de $\sigma_{i,n}$. La notation σ_i^m , où $m \in \mathbb{Z}$, sera définie par

$$\sigma_i^m = \begin{cases} \underbrace{\sigma_i \cdots \sigma_i}_{m \text{ fois}} & : m \geq 0 \\ \underbrace{\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}}_{|m| \text{ fois}} & : m < 0. \end{cases}$$

Pour voir que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ engendre \mathcal{B}_n , il nous faut d'abord un peu de terminologie. Une tresse est *échelonnée* s'il existe une partition de $[0, 1]$ en intervalles

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$$

telle que la projection de la tresse sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ n'a qu'un seul point double dans $\mathbb{R} \times [t_j, t_{j+1}]$ pour tout j . Autrement dit, restreinte à $\mathbb{R} \times [0, 1] \times [t_j, t_{j+1}]$, la tresse est élémentaire. Ainsi, toute tresse échelonnée égale un produit de tresses élémentaires. Or il est clair que tout type de tresse contient au moins une tresse échelonnée.

Le théorème suivant, démontré en 1925 par le mathématicien allemand Emil Artin, fixe une présentation de \mathcal{B}_n dont les générateurs sont les types de tresse élémentaires.

THÉORÈME 2 (LE THÉORÈME DE PRÉSENTATION D'ARTIN). *Le groupe \mathcal{B}_n admet une présentation*

$$\left(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \forall |i-j| > 1 \end{array} \right. \right)$$

La démonstration de ce théorème est très longue et compliquée. Il est facile de vérifier que les relations ci-dessus soient satisfaites dans \mathcal{B}_n , comme nous le ferons au cours. Ce qui est nettement moins évident est de s'assurer qu'il n'y en a pas d'autres. Pour la preuve complète, voir les livres de Birman, Hansen et Moran.

B. Le théorème de représentation d'Artin

Une autre approche à l'étude de la structure d'un groupe G consiste en la construction d'une *représentation* du groupe G sur un autre groupe H . Pour comprendre ce qu'est une représentation, il nous faut d'abord quelques rappels algébriques.

Soit H un groupe quelconque. Soit $End(H) = \{f : H \rightarrow H \mid f \text{ homomorphisme}\}$, l'ensemble des *endomorphismes* de H . Observer que dans $End(H)$ il y a un produit associatif naturel, noté \bullet , défini par $(f \bullet g)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in H$. Autrement dit, le produit est donné par la composition d'homomorphismes dans l'ordre inverse. L'homomorphisme identité est clairement une identité multiplicative par rapport au produit \bullet , mais $End(H)$ n'est pas un groupe, car les endomorphismes qui ne sont pas des isomorphismes ne possèdent pas d'inverse multiplicatif.

Les endomorphismes de H qui sont des isomorphismes s'appellent les *automorphismes* de H . On note l'ensemble de tous les automorphismes de H par $Aut(H)$. Il est clair que le produit \bullet définit une vraie structure de groupe sur $Aut(H)$, car tout automorphisme possède un inverse multiplicatif par rapport au produit \bullet .

DÉFINITION. Soient G et H deux groupes. Une *représentation* de G sur H consiste en une application $\Phi : G \rightarrow End(H)$ qui préserve les produits, i.e., $\Phi(wz) = \Phi(w) \bullet \Phi(z) = \Phi(z) \circ \Phi(w)$.

Une représentation de G sur H peut être particulièrement révélatrice de la nature de G si son image se trouve dans $Aut(H)$. Telle est le cas de la représentation de \mathcal{B}_n sur le groupe libre à n générateurs, dont Artin a démontré l'existence en 1925. En fait, il a même trouvé une caractérisation très fine de l'image de sa représentation, comme nous le précisons ci-dessous.

Considérons le groupe libre à n générateurs, $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, où $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. On définit un sousensemble $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ de $Aut(\mathcal{F}(\mathbf{x}))$ par

$$f \in \mathcal{T}(\mathbf{x}) \iff \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f(x_1 \cdots x_n) = x_1 \cdots x_n \\ (2) \quad \exists w_1, \dots, w_n \in \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad \tau \in \mathcal{S}_n \text{ t.q.} \\ \quad \quad f(x_i) = w_i x_{\tau(i)} w_i^{-1} \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ est même un sousgroupe de $Aut(\mathcal{F}(\mathbf{x}))$ (laissé comme exercice).

Le résultat d'Artin s'exprime donc de la manière suivante en termes de $\mathcal{T}(\mathbf{x})$.

THÉORÈME 3 (LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION D'ARTIN). *Il existe un isomorphisme $\Phi : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x})$ tel que*

$$(\diamond) \quad \Phi(\sigma_i)(x_j) = \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & : j = i \\ x_i & : j = i + 1 \\ x_j & : \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE. Ce choix d'isomorphisme peut paraître difficilement compréhensible, si l'on ne connaît pas la motivation géométrique de sa définition. En effet, il est possible de construire Φ géométriquement de manière tout à fait naturelle. Cette construction force la définition de $\Phi(\sigma_i)$ ci-dessus. Nous verrons quelques détails de cette construction après la démonstration du théorème.

PREUVE. Nous démontrerons ce théorème par une suite d'affirmations, dont le but sera d'abord de montrer comment construire Φ à partir de la condition (\diamond) et ensuite de vérifier que Φ ainsi défini soit inversible.

Les affirmations que nous allons démontrer concernent l'application ensembliste

$$\varphi : \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\} \rightarrow \text{End}(\mathcal{F}(\mathbf{x}))$$

telle que $\varphi(\sigma_i) = \widehat{\varphi}_i$, où $\varphi_i : \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x})$ est l'application ensembliste définie par

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & : j = i \\ x_i & : j = i + 1 \\ x_j & : \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous voulons donc démontrer que

- (1) $\varphi(\sigma_i) \in \mathcal{T}(\mathbf{x})$ pour tout $1 \leq i < n$;
- (2) l'homomorphisme $\widehat{\varphi} : \mathcal{F}(\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x})$ induit un homomorphisme $\varphi_* : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x})$; et
- (3) l'homomorphisme φ_* est un isomorphisme.

Une fois l'affirmation (3) démontrée, grâce au fait que φ soit définie pour être en accord avec la condition (\diamond) , nous pourrions poser $\Phi = \varphi_*$.

Preuve de (1): D'abord il nous faut montrer que $\widehat{\varphi}_i$ est un automorphisme. A cette fin, nous définirons explicitement un homomorphisme inverse.

Définir

$$\psi_i : \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}) : x_j \mapsto \begin{cases} x_{i+1} & : j = i \\ x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} & : j = i + 1 \\ x_j & : \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $\widehat{\psi}_i$ est l'inverse de $\widehat{\varphi}_i$.

Remarquer que nous aurons donc forcément que $\widehat{\varphi}(\sigma_i^{-1}) = \widehat{\psi}_i$.

La condition (1) de la définition de $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ se vérifie par moyen un calcul simple.

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_i)(x_1 \cdots x_n) &= \varphi_i(x_1) \cdots \varphi_i(x_n) \\ &= x_1 \cdots x_{i-1} (x_i x_{i+1} x_i^{-1}) x_i x_{i+2} \cdots x_n \\ &= x_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

La condition (2) de la définition de $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ est satisfaite par définition de $\varphi(\sigma_i)$. En particulier, la permutation associée à $\varphi(\sigma_i)$ est $(i \ i+1)$, la même que la permutation de la tresse!

Preuve de (2): Grâce à l'affirmation (1), nous avons démontré l'existence d'un homomorphisme

$$\widehat{\varphi} : \mathcal{F}(\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x}),$$

induit par $\varphi(\sigma_i) = \widehat{\varphi}_i$. Il faut vérifier que les relations de la présentation de \mathcal{B}_n (Théorème 2) se trouvent dans le noyau de $\widehat{\varphi}$. Or pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i)(x_j) &= \varphi(\sigma_i) \bullet \varphi(\sigma_{i+1}) \bullet \varphi(\sigma_i)(x_j) \\ &= \varphi(\sigma_i) \circ \varphi(\sigma_{i+1}) \circ \varphi(\sigma_i)(x_j) \\ &= \begin{cases} \varphi(\sigma_i) \circ \varphi(\sigma_{i+1})(x_i x_{i+1} x_i^{-1}) & : j = i \\ \varphi(\sigma_i) \circ \varphi(\sigma_{i+1})(x_i) & : j = i + 1 \\ \varphi(\sigma_i) \circ \varphi(\sigma_{i+1})(x_j) & : \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi(\sigma_i)(x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1}) & : j = i \\ \varphi(\sigma_i)(x_i) & : j = i + 1 \\ \varphi(\sigma_i)(x_{i+1}) & : j = i + 2 \\ \varphi(\sigma_i)(x_j) & : \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} & : j = i \\ x_i x_{i+1} x_i^{-1} & : j = i + 1 \\ x_i & : j = i + 2 \\ x_j & : \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})(x_j) &= \varphi(\sigma_{i+1}) \bullet \varphi(\sigma_i) \bullet \varphi(\sigma_{i+1})(x_j) \\
&= \varphi(\sigma_{i+1}) \circ \varphi(\sigma_i) \circ \varphi(\sigma_{i+1})(x_j) \\
&= \begin{cases} \varphi(\sigma_{i+1}) \circ \varphi(\sigma_i)(x_{i+1}x_{i+2}x_{i+1}^{-1}) & : j = i + 1 \\ \varphi(\sigma_{i+1}) \circ \varphi(\sigma_i)(x_{i+1}) & : j = i + 2 \\ \varphi(\sigma_{i+1}) \circ \varphi(\sigma_i)(x_j) & : \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \varphi(\sigma_{i+1})(x_i x_{i+2} x_i^{-1}) & : j = i + 1 \\ \varphi(\sigma_{i+1})(x_i) & : j = i + 2 \\ \varphi(\sigma_{i+1})(x_i x_{i+1} x_i^{-1}) & : j = i \\ \varphi(\sigma_{i+1})(x_j) & : \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & : j = i + 1 \\ x_i & : j = i + 2 \\ x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} & : j = i \\ x_j & : \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{\varphi}(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \widehat{\varphi}(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$.

Il est encore plus facile de vérifier que $\widehat{\varphi}(\sigma_i\sigma_j) = \widehat{\varphi}(\sigma_j\sigma_i)$ si $|i - j| > 1$, car

$$|i - j| > 1 \implies \{i, i + 1\} \cap \{j, j + 1\} = \emptyset.$$

Preuve de (3): Soit $f \in \mathcal{T}(\mathbf{x})$. Essayons de trouver un type de tresse $b \in \mathcal{B}_n$ tel que $\varphi_*(b) = f$, ce qui impliquera que φ_* soit surjectif.

Considérer $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$ et $\tau \in \mathcal{S}_n$, qui satisfont aux conditions (1) et (2) pour f de la définition des éléments de $\mathcal{T}(\mathbf{x})$. Pour tout $w \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$, soit $\omega(w)$ la longueur du plus court mot de $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ dont la classe est w . Poser

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^n \omega(w_i).$$

Nous démontrerons cette affirmation par récurrence sur $\omega(f)$.

Si $\omega(f) = 0$, alors $\omega(w_i) = 0$ pour tout i , i.e., $w_i = [\emptyset]$ pour tout i . Ainsi

$$x_1 \cdots x_n = f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n) = x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)},$$

ce qui implique que $\tau = Id$. Par conséquent, $f(x_j) = x_j$ pour tout j , i.e., $f = Id$. Or $Id = \varphi_*(e_n)$.

Supposons que l'affirmation soit vérifiée pour tout f tel que $\omega(f) < N$. Soit $f \in \mathcal{T}(\mathbf{x})$ tel que $\omega(f) = N$. On a que

$$(w_1 x_{\tau(1)} w_1^{-1}) \cdots (w_n x_{\tau(n)} w_n^{-1}) = f(x_1 \cdots x_n) = x_1 \cdots x_n.$$

On peut démontrer que grâce à cette égalité, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et $z \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$ tels que

- (a) $w_{i+1} = w_i x_{\tau(i)}^{-1} z$, où $z \neq x_{\tau(i)} z'$, ou
- (b) $w_i = w_{i+1} x_{\tau(i+1)} z$, où $z \neq x_{\tau(i+1)}^{-1} z'$.

(Laisseré comme exercice.) Il est clair que l'on peut supposer que w_i ne se termine pas par un facteur de $x_{\tau(i)}^{\pm 1}$.

Observer que dans la cas (a), $\omega(w_{i+1}) = \omega(w_i z) + 1$, tandis que dans le cas (b), $\omega(w_i) = \omega(w_{i+1} z) + 1$

Dans le cas (a), il est clair que

$$f \circ \varphi_*(\sigma_i)(x_j) = \begin{cases} w_i x_{\tau(i)} w_i^{-1} & : j = i + 1 \\ w_j x_{\tau(j)} w_j^{-1} & : j \neq i, i + 1, \end{cases}$$

tandis que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_*(\sigma_i)(x_i) &= f(x_i x_{i+1} x_i^{-1}) \\ &= w_i x_{\tau(i)} w_i^{-1} w_{i+1} x_{\tau(i+1)} w_{i+1}^{-1} w_i x_{\tau(i)}^{-1} w_i^{-1} \\ &= w_i z x_{\tau(i+1)} z^{-1} w_i^{-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \omega(f \circ \varphi_*(\sigma_i)) &= \omega(w_i z) + \sum_{j \neq i+1} \omega(w_j) \\ &< \omega(w_{i+1}) + \sum_{j \neq i+1} \omega(w_j) = \omega(f) = N. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe un type de tresse b tel que

$$\varphi_*(b) = f \circ \varphi_*(\sigma_i) = \varphi_*(\sigma_i) \bullet f,$$

donc

$$f = \varphi_*(\sigma_i)^{-1} \bullet \varphi_*(b) = \varphi_*(\sigma_i^{-1} b).$$

Dans le cas (b), on voit facilement que

$$f \circ \varphi_*(\sigma_i^{-1})(x_j) = \begin{cases} w_{i+1} x_{\tau(i+1)} w_{i+1}^{-1} & : j = i \\ w_j x_{\tau(j)} w_j^{-1} & : j \neq i, i + 1, \end{cases}$$

tandis que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_*(\sigma_i^{-1})(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}) \\ &= w_{i+1} x_{\tau(i+1)}^{-1} w_{i+1}^{-1} w_i x_{\tau(i)} w_i^{-1} w_{i+1} x_{\tau(i+1)} w_{i+1}^{-1} \\ &= w_{i+1} z x_{\tau(i)} z^{-1} w_{i+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \omega(f \circ \varphi_*(\sigma_i^{-1})) &= \omega(w_{i+1} z) + \sum_{j \neq i} \omega(w_j) \\ &< \omega(w_i) + \sum_{j \neq i} \omega(w_j) = \omega(f) = N. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe un type de tresse b tel que

$$\varphi_*(b) = f \circ \varphi_*(\sigma_i^{-1}) = \varphi_*(\sigma_i^{-1}) \bullet f,$$

donc

$$f = \varphi_*(\sigma_i^{-1})^{-1} \bullet \varphi_*(b) = \varphi_*(\sigma_i b).$$

Ainsi, φ_* est surjectif.

Il est nettement moins aisé de vérifier l'injectivité de φ_* , car il faut montrer que $\ker \widehat{\varphi}$ égale la conséquence des relateurs de la présentation du théorème 7.2, ce qui n'est pas un problème trivial. Au cours nous essayerons de motiver ce fait topologiquement. \square

Voyons maintenant le sens géométrique du théorème de représentation. Soit β un représentant de b . Soit D un disque ouvert dans le plan $\{z = 0\}$ qui contient l'image de β sous projection sur ce même plan. Poser $C = D \times [0, 1]$, le cylindre ouvert et plein de base D et de hauteur 1. Ainsi C contient la tresse β .

Puisque β est compacte, il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $(r, s, t) \in C \setminus \beta$ pour tout $t \in [0, 1]$. Définir un chemin

$$\lambda : [0, 1] \rightarrow C \setminus \beta : t \mapsto (r, s, t).$$

On peut montrer facilement que le groupe fondamental d'un disque perforé de n trous est le groupe libre à n générateurs, où chaque générateur correspond à un lacet qui faisait une fois le tour d'un des trous. Par conséquent, il y a des isomorphismes

$$f : \pi_1((D \times \{0\}) \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, p_0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(\{x_1, \dots, x_n\})$$

et

$$f' : \pi_1((D \times \{1\}) \setminus \{p'_1, \dots, p'_n\}, p'_0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(\{x_1, \dots, x_n\})$$

où $p_i = (i, 0, 0)$ et $p'_i = (i, 0, 1)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et $p_0 = (r, s, 0)$ et $p'_0 = (r, s, 1)$. Sous le premier isomorphisme, le générateur x_i est l'image de la classe du lacet

$$\bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots$$

$$p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{i-1} \quad p_i \quad p_{i+1} \quad \dots$$

appelé ξ_i , tandis que sous le deuxième isomorphisme il est l'image du lacet suivant, appelé ξ'_i .

$$\bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots$$

$$p'_0 \quad p'_1 \quad \dots \quad p'_{i-1} \quad p'_i \quad p'_{i+1} \quad \dots$$

Comme conséquence de la preuve du théorème de représentation, pour définir $\Phi : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x})$, il suffit de définir pour tout $1 \leq i \leq n$ une application ensembliste $\varphi_i : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathcal{F}(\{x_1, \dots, x_n\})$ qui satisfait à la condition (\diamond) et ensuite de poser $\Phi(\sigma_i) = \widehat{\varphi}_i$. Nous verrons maintenant comment définir une telle application ensembliste de manière géométrique.

Pour une tresse quelconque β , soit $\beta^\sharp(\xi'_j)$ le lacet dans $(D \times \{0\}) \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ que nous obtenons en glissant le lacet ξ'_j le long des brins de β , glissant en même temps le point de base le long de λ . On peut imaginer les brins de β , ainsi que λ , comme étant en fil de fer, et le lacet ξ'_j comme étant un bout de ficelle fixé à λ , qui fait ensuite le tour de β_i . Il s'agit donc de tirer la ficelle doucement du haut vers le bas, pour voir quel est le lacet résultant.

Il est facile de voir que $\sigma_i^\sharp(\xi'_j)$ est

$$\bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots$$

$$p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{i-1} \quad p_i \quad p_{i+1} \quad \dots$$

si $j = i$,

$$\bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots$$

$$p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{i-1} \quad p_i \quad p_{i+1} \quad \dots$$

si $j = i + 1$, et

$$\bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots$$

$$p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{j-1} \quad p_j \quad p_{j+1} \quad \dots$$

sinon, ce qui entraîne que

$$f\left([\sigma_i^\sharp(\xi'_j)]\right) = \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & : j = i \\ x_i & : j = i + 1 \\ x_j & : \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous pouvons donc définir φ_i par $\varphi_i(x_j) = f([\sigma_i^\sharp(\xi'_j)])$.

C. Les liens entre les tresses et les entrelacs

Nous sommes maintenant prêts à préciser les liens entre les tresses et les entrelacs, la justification principale de notre étude de la théorie des tresses. D'abord nous verrons comment construire un entrelacs à partir d'une tresse. Nous énoncerons aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que les entrelacs obtenus de deux tresses soient équivalents. Ensuite, nous verrons une méthode de faire le contraire. Enfin nous énoncerons et vérifierons une formule pour une présentation du groupe d'un entrelacs basée sur le théorème de représentation d'Artin.

C.1 La fermeture d'une tresse et le théorème de Markov.

Fixer la droite $\iota_0 = \{(t, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ dans \mathbb{R}^3 , orientée dans le sens de la x -coordonnée croissante. Pour tout entier positif n , fixer également un chemin polygonal $\lambda_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, qui est formé du segment horizontal qui relie $(n, 0, 0)$ à $(n, 2, 0)$, suivi du segment vertical qui relie $(n, 2, 0)$ à $(n, 2, 1)$, suivi du segment horizontal qui relie $(n, 2, 1)$ à $(n, 0, 1)$.

REMARQUE. Observer que, par la définition d'une tresse, l'intersection d'une tresse quelconque avec ι_0 ou avec λ_n est toujours vide. Par ailleurs l'intersection de ι_0 avec chaque λ_n ou de λ_i et λ_j ($i \neq j$) est vide.

Nous allons voir maintenant comment utiliser ces données pour obtenir un entrelacs à partir d'une tresse, de manière très naturelle.

DÉFINITION. Soit β une tresse à n brins. La *fermeture* de β , notée $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$, est l'entrelacs orienté obtenu en collant les chemins polygonaux λ_i , pour tout $1 \leq i \leq n$, aux bouts des brins. La droite \mathfrak{l}_0 s'appelle alors *l'axe* de la tresse.

La remarque ci-dessus montre que $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ n'a pas de points doubles, et donc qu'il s'agit véritablement d'un entrelacs. Grâce à la même remarque, nous avons aussi que l'axe de la tresse ne l'intersecte pas.

La raison d'être de l'axe de l'entrelacs n'est pas évidente. Nous la comprendrons mieux lorsque nous essayerons d'effectuer la transformation inverse, i.e., d'obtenir une tresse à partir d'un entrelacs. Bornons-nous pour le moment à observer que tous les fils de $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ sont positivement orientés par rapport à \mathfrak{l}_0 , et que tout demi-plan à frontière \mathfrak{l}_0 coupe l'entrelacs dans un nombre de points égal au nombre de brins de la tresse.

REMARQUE. Il est facile et important d'observer que si τ est la permutation associée à β , le nombre de composantes de $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ est égal au nombre de cycles dans la factorisation de τ .

Nous pouvons démontrer sans trop de peine que si deux tresses sont équivalentes, alors leurs fermetures sont aussi équivalentes; l'isotopie d'entrelacs peut rester constante en dehors de $\mathbb{R} \times [0, 1] \times [0, 1]$. Ceci nous permet de définir une application

$$\mathcal{L} : \mathcal{B} \rightarrow \mathfrak{E} : b \mapsto [\tilde{\mathcal{L}}(\beta)],$$

où $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$, \mathfrak{E} est l'ensemble de tous les types d'entrelacs, et β est un représentant de b .

Par contre, il est facile de trouver des exemples de deux tresses nonéquivalentes, ou même avec des nombres de brins différents, dont les fermetures sont tout de même équivalentes. En 1935 Markov a explicité des conditions nécessaires et suffisantes que doivent satisfaire deux tresses dont les fermetures sont équivalentes. Tel est le contenu du théorème suivant.

THÉORÈME 4 (LE THÉORÈME DE MARKOV). *Soient $a \in \mathcal{B}_m$ et $b \in \mathcal{B}_n$. Alors $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$ si et seulement s'il existe une suite finie de types de tresse*

$$a = b_0, b_1, \dots, b_s, b_{s+1} = b,$$

telle que pour tout $1 \leq i \leq s$, $b_i \in \mathcal{B}_{n_i}$ et l'une des deux conditions suivantes est satisfaite.

- (1) $n_i = n_{i+1}$ et il existe $c \in \mathcal{B}_{n_i}$ tel que $b_{i+1} = cb_i c^{-1}$.
- (2) $|n_i - n_{i+1}| = 1$ et $b_{i+1} = b_i \sigma_p^{\pm 1}$, où $p = \min\{n_i, n_{i+1}\}$.

PREUVE PARTIELLE. La nécessité de l'existence d'une telle suite étant très difficile à démontrer, nous allons nous restreindre à démontrer sa suffisance.

Observer d'abord que $\mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(ba)$ pour tout $a, b \in \mathcal{B}_n$. Par conséquent,

$$\mathcal{L}(cbc^{-1}) = \mathcal{L}(c^{-1}cb) = \mathcal{L}(b).$$

Donc, deux tresses qui satisfont à la première condition ont bien des fermetures équivalentes.

Nous verrons au cours un dessin qui explique pourquoi deux tresses qui satisfont à la deuxième condition ont des fermetures équivalentes. \square

C.2 Le lemme d'Alexander.

Nous avons vu que la fermeture de toute tresse est orientée positivement en tout point par rapport à l'axe l_0 et que l'intersection de tout demiplan à frontière l_0 avec la fermeture de la tresse contient le même nombre de points.

Exprimons dans un langage plus analytique ce que nous entendons par l'orientation positive en un point de l'entrelacs L par rapport à une droite orientée l . D'abord, fixons un point d'origine p_0 sur l et un demiplan H dont la frontière est l . Chaque composante $f_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de l'entrelacs L possède alors une paramétrisation cylindrique $f_i(z) = (h_i(z), r_i(z), \theta_i(z))$, où

- (1) $|h_i(z)|$ est la distance de $f_i(z)$ jusqu'au plan P qui contient p_0 dont l est un normal, le signe de $h_i(z)$ dépendant de manière évidente de sa position par rapport au plan;
- (2) $r_i(z)$ la distance de $f_i(z)$ jusqu'à l ; et
- (3) $\theta_i(z)$ est l'angle entre H et le perpendiculaire qui relie $f_i(z)$ à l .

Alors l'entrelacs est positivement orienté par rapport à l en un point $f_i(z)$ de sa $i^{\text{ème}}$ composante si θ_i est strictement croissante dans un petit voisinage de z . Il est donc clair que si l'entrelacs est orienté positivement partout, alors tout demiplan $\{\theta = \theta_0\}$ le coupe dans le même nombre de points.

Voici la clé de la transformation de tout entrelacs en tresse.

THÉORÈME 5 (LE LEMME D'ALEXANDER). *Soient L un entrelacs et $l \in \mathbb{R}^3 \setminus L$ une droite orientée. Il existe un entrelacs L' isotope à L tel que L' soit orienté positivement en tout point par rapport à l .*

Sous les hypothèses de ce théorème, nous pouvons donc choisir un demiplan dont la frontière est l , l'utiliser pour couper L' , que nous pouvons ensuite aplatir pour obtenir – une tresse! Il est clair que la fermeture de la tresse ainsi obtenue est équivalente à l'entrelacs de départ.

PREUVE. Dans cette preuve nous utiliserons la même terminologie que celle définie lors de notre explication de la paramétrisation cylindrique.

Modifions par isotopies successives l'entrelacs L . D'abord nous le déplaçons légèrement pour qu'il soit en position régulière par rapport à la projection sur le plan P .

Ensuite nous considérons toutes les préimages p_1, \dots, p_m de points doubles de l'ombre de L . Supposons que p_i se trouve sur la composante j_i . Pour chaque i , nous modifions un petit peu l'orientation des brins dans un petit voisinage V_i de p_i pour que la restriction de θ_{j_i} à V_i soit strictement croissante.

L'avant dernière étape consiste en la modification par isotopies de $L \setminus \bigcup_{i=1}^m V_i$ pour obtenir une réunion d'arcs polygonaux telle que θ_i ne soit constante sur aucune des arêtes. En agissant ainsi, il est possible que nous rajoutions de nouveaux points doubles sur l'ombre de L . Subdivisons chaque arête pour qu'aucune arête ne contienne plus d'une préimage de point double. Appelons le nouvel entrelacs ainsi obtenu \tilde{L} .

Les arêtes de $\tilde{L} \setminus \bigcup_{i=1}^m V_i$ sont donc de deux sortes: les *bonnes*, sur lesquelles θ_i est strictement croissante, et les *mauvaises*, sur lesquelles θ_i est strictement décroissante. Voyons comment remplacer chaque mauvaise arête par deux bonnes arêtes.

Soit l une mauvaise arête. S'il existe un point $q \in \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{L}$ tel que le triangle déterminé par l et q ne soit pas coupé par $\tilde{L} \setminus l$, alors on peut remplacer l par les

deux autres cotés du triangle, qui seront de bonnes arêtes, par une isotopie.

Si la projection de $\tilde{L} \setminus l$ ne croise pas celle de l , on peut toujours choisir q suffisamment proche de l pour que le triangle ainsi formé n'ait pas d'intersection avec $\tilde{L} \setminus l$.

Si, au contraire, la projection de $\tilde{L} \setminus l$ croise celle de l , alors cela ne peut se produire qu'une seule fois, grâce à la subdivision effectuée ci-dessus. Si la h -coordonnée de la préimage du point de croisement sur l est plus grande que celle du point sur $\tilde{L} \setminus l$, alors on choisit q bien au-dessus de l'arête où se trouve cette préimage. Si la h -coordonnée de la préimage du point de croisement sur l est plus petite que celle du point sur $\tilde{L} \setminus l$, on fait le contraire. \square

C.3 Le théorème d'Artin-Birman.

Dans ce paragraphe, nous verrons une méthode de calculer $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$, pour un entrelacs L quelconque. Cette méthode constitue une application très importante de théorème de représentation d'Artin.

THÉORÈME 6 (LE THÉORÈME D'ARTIN-BIRMAN). *Soit $\Phi : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x})$ la représentation d'Artin. Soit $b \in \mathcal{B}_n$. Alors pour tout représentant β de b , le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta))$ possède une présentation*

$$(x_1, \dots, x_n : x_1 = \Phi(b)(x_1), \dots, x_n = \Phi(b)(x_n)).$$

Ainsi, pour trouver une présentation du groupe d'un entrelacs, on doit:

- (1) choisir un axe,
- (2) déformer l'entrelacs pour qu'il soit orienté positivement par rapport à l'axe,
- (3) couper et ouvrir l'entrelacs pour trouver la tresse dont il est la fermeture, et enfin
- (4) appliquer la formule du théorème d'Artin-Birman.

PREUVE. Nous allons faire appel au théorème de Seifert-van Kampen pour démontrer que la formule est juste. Ainsi, nous devons trouver une décomposition de $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ en deux morceaux dont nous pouvons calculer les groupes fondamentaux, ainsi que le groupe fondamental de leur intersection.

D'abord, tout comme dans la construction des présentations dessus et dessous, il nous faut préciser quelques repères.

Soit β un représentant de b . Soient D et C le disque et le cylindre, et $\lambda : [0, 1] \rightarrow C \setminus \beta$ le chemin, définis à la fin du paragraphe B.

Soit $D' \subset D$ un fermé contractile tel que $(r, s, 0) \notin D'$ mais qui contient l'image de β sous projection sur le plan $\{z = 0\}$. Poser $C' = D' \times [0, 1]$. Ainsi C' contient β sans contenir le chemin λ .

Considérer maintenant les espaces quotients obtenus en identifiant le haut au bas du cylindre point par point. On a donc

$$T = C/\{(x, y, 0) \sim (x, y, 1)\} \quad \text{et} \quad T' = C'/\{(x, y, 0) \sim (x, y, 1)\}$$

qui sont des tores pleins, ainsi que

$$T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta) \cong C \setminus \beta/\{(x, y, 0) \sim (x, y, 1)\},$$

qui est un tore plein, moins l'entrelacs $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$. Notons q la classe d'équivalence de $(r, s, 0)$ et $(r, s, 1)$ dans T , et notons ℓ le lacet dans T induit par le chemin λ .

Nous pouvons maintenant décrire la décomposition de $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ à laquelle nous allons appliquer Seifert-van Kampen, car il est clair que

$$\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta) = (\mathbb{R}^3 \setminus T') \cup (T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta)).$$

Observer également que

$$(\mathbb{R}^3 \setminus T') \cap (T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta)) = T \setminus T'.$$

Une présentation de $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T', q)$: L'espace $\mathbb{R}^3 \setminus T'$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$, dont nous avons calculé le groupe fondamental comme exercice. Ainsi nous savons que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T', q)$ a une présentation $(m : 1)$, où le générateur m représente un lacet qui fait une fois le tour méridien du tore.

Une présentation de $\pi_1(T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta), q)$: Cet argument sera malheureusement peu rigoureux. Il est possible, mais très compliqué et peu enrichissant, d'écrire une démonstration par récurrence, basée sur le théorème de Seifert-van Kampen, de ce que nous allons affirmer. Nous allons donc nous satisfaire de faire appel à notre intuition.

On peut facilement se convaincre que tout le groupe $\pi_1(T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta), q)$ peut être généré par $n + 1$ éléments: n qui correspondent aux vides laissés par les n brins de β , notés x_i , pour $1 \leq i \leq n$, et un générateur dont un représentant est ℓ . D'ailleurs il est clair que $\lambda \star \xi'_j \star \lambda^{-1} \simeq_* \beta^\#(\xi'_j)$ dans $C \setminus \beta$, ce qui implique que pour tout j ,

$$(\heartsuit) \quad \ell x_j \ell^{-1} = \Phi(b)(x_j)$$

dans $\pi_1(T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta), q)$.

On peut se demander s'il existe des relations parmi les générateurs qui ne sont pas une conséquence de (\heartsuit) . Avant de répondre à cette question, observer que la relation (\heartsuit) entraîne que pour tout $w = x_{i_1} \cdots x_{i_k} \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$,

$$\ell w \ell^{-1} = \ell x_{i_1} \ell^{-1} \ell \cdots \ell^{-1} \ell x_{i_k} \ell^{-1} = \Phi(b)(x_{i_1}) \cdots \Phi(b)(x_{i_k}) = \Phi(b)(w).$$

En particulier

$$\ell \Phi(b^{-1})(x_j) \ell^{-1} = \Phi(b) \Phi(b^{-1})(x_j) = x_j$$

pour tout $1 \leq j \leq n$. Par conséquent,

$$(\heartsuit\heartsuit) \quad \ell^{-1} x_j \ell = \Phi(b^{-1})(x_j)$$

pour tout j . Appliquant ensemble les relations (\heartsuit) et $(\heartsuit\heartsuit)$, nous obtenons que

$$x_j \ell^{-1} = \ell^{-1} \Phi(b)(x_j) \quad \text{et} \quad x_j \ell = \ell \Phi(b^{-1})(x_j)$$

pour tout j . Autrement dit, tout élément de $\pi_1(T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta), q)$ peut s'écrire $\ell^m \cdot w$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $w \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$.

Supposons maintenant que $\ell^m \cdot w = \ell^{m'} \cdot w'$, ce qui est le seul type de nouvelle relation possible. Alors $\ell^{m-m'} \cdot w(w')^{-1} = 1$. Or on peut se convaincre par inspection de la situation topologique que cela n'est possible que si $m - m' = 0$ et $w(w')^{-1} = 1$; le lacet ℓ est vraiment "indépendant" des lacets x_j .

Nous concluons donc que

$$(x_1, \dots, x_n, \ell : \{\ell x_i \ell^{-1} = \Phi(b)(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\})$$

est une présentation de $\pi_1(T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta), q)$.

Une présentation de $\pi_1(T \setminus T', q)$: L'espace $T \setminus T'$ est homéomorphe au tore creux, dont nous avons calculé le groupe fondamental au chapitre III. Ainsi nous savons que $\pi_1(T \setminus T', q)$ a une présentation $(m, \ell : m\ell = \ell m)$, où le générateur m représente un lacet qui fait une fois le tour méridien du tore et le générateur ℓ représente un lacet qui fait une fois le tour longitudinal du tore.

Etant donné ces trois présentations, il reste à calculer les homomorphismes induits par les inclusions $\iota_1 : T \setminus T' \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus T'$ et $\iota_2 : T \setminus T' \hookrightarrow T \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta)$. Nous voyons sans difficulté que

$$\pi_1(\iota_1)(\ell) = 1 \quad \text{et} \quad \pi_1(\iota_1)(m) = m,$$

tandis que

$$\pi_1(\iota_2)(\ell) = \ell \quad \text{et} \quad \pi_1(\iota_2)(m) = x_1 \cdots x_n.$$

Le théorème de Seifert-van Kampen implique alors que

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{\mathcal{L}}(\beta)) &\cong | m : 1 |_{|m, \ell : m\ell = \ell m|}^* | x_1, \dots, x_n, \ell : \{\ell x_i \ell^{-1} = \Phi(b)(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} | \\ &\cong | x_1, \dots, x_n, \ell, m : \{\ell = 1, m = x_1 \cdots x_n\} \cup \{\ell x_i \ell^{-1} = \Phi(b)(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} | \\ &\cong | x_1, \dots, x_n : \{x_i = \Phi(b)(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} | . \end{aligned}$$

□