EPFL 25 novembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 10

L'exercice 1 peut être rendu le 9 décembre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1.

(a) Soient $(X, \mathcal{T}_{d_X})$ et $(Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ deux espaces métriques. Considérons une application $f : X \to Y$ qui vérifie pour tous $x, x \in X'$ la propriété

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x').$$

Montrer que dans ce cas f est un plongement. (On parle alors d'un *plongement isométrique* de X dans Y.)

(b) Donner un exemple d'un plongement entre deux espaces métriques, qui n'est pas isométrique, ainsi qu'un exemple d'un plongement isométrique, différent de l'identité.

Rappel: Une application $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre deux espaces topologiques est appelée un ***plongement*** *si sa corestriction à l'image $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ est un homéomorphisme.*

Exercice 2. Étant donné un ensemble X, on rappelle que $\mathbb{R}^X$ dénote l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_{\bar{\rho}})$, où $\mathcal{T}_{\bar{\rho}}$ est la topologie induite par la métrique uniforme.
Prouver qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^X$ converge uniformément vers un $f \in \mathbb{R}^X$ si et seulement si (f_n) converge vers f dans l'espace métrique $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_{\bar{\rho}})$.

On rappelle le résultat suivant, qui a été prouvé au cours:

Lemme (La caractérisation de l'adhérence dans un espace métrique)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique métrisable et soit $A \subset X$ un sous-ensemble de X. Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite de points de A qui convergent vers x.

Exercice 3. En utilisant le Lemme ci-dessus, prouver que $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\text{Box}})$ n'est pas métrisable.

Indication: Considérer $A = \{(x_1, x_2, ...) \subset \mathbb{R}^\omega \mid x_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, ...)$.

Exercice 4. Soit J un ensemble d'indices non-dénombrable. En utilisant le Lemme ci-dessus, prouver que $(\mathbb{R}^J, \underset{\alpha\in J}{\ast} \mathcal{T})$ n'est pas métrisable, où $\mathcal{T}$ désigne la topologie standard sur $\mathbb{R}$.

Indication: Considérer $A = \{(x_\alpha) \subset \mathbb{R}^J \mid x_\alpha = 1$ pour tous $\alpha \in J$ sauf un nombre fini $\}$ et $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, ...)$.

Définition 1. Soient $(X, \mathcal{T}_d)$ un espace métrique et $A \subset X$ un sous-ensemble non-vide de X. Pour tout $x \in X$, on définit **la distance entre x et A** par

$$d(x, A) := \inf_{a\in A}\{d(x, a)\}.$$

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T}_d)$ un espace métrique et soit $A \subset X$. Montrer que

$$\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}.$$