EPFL 2 décembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 11

L'exercice 3 peut être rendu le 16 décembre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$, muni de la topologie suivante:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}.$$

Est-ce que X est connexe dans $\mathcal{T}$? Le sous-ensemble $A = \{b, d, e\}$, est-il connexe par rapport à la topologie de sous-espace $\mathcal{T}_A$?

Exercice 2. Soit X un ensemble infini. Prouver que X est connexe dans la topologie du complément fini, donnée par:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U \subseteq X \mid X \backslash U \text{ est fini}\}.$$

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) L'espace X n'est pas connexe.

(b) Il existe un sous-ensemble propre de X (i.e., n'est pas égal à tout X et non-vide), qui est ouvert et fermé au même temps.

Exercice 4.

(a) Considérons un ensemble X, muni de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{'}$. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{'}$, a-t-on $(X, \mathcal{T})$ connexe $\Rightarrow (X, \mathcal{T}^{'})$ connexe, ou $(X, \mathcal{T}^{'})$ connexe $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ connexe, ou les deux?

(b) Montrer que "être connexe" pour un espace est un invariant topologique.

(c) Est-ce que $\mathbb{R}_\ell$, la droite réelle munie de la topologie de la limite supérieure (cf. Exercice 4 Série 2) est connexe?

Exercice 5. Soient A et B des sous-espaces propres des espaces topologiques X et Y, respectivement. En supposant que X et Y sont connexes, montrer que $(X \times Y) \backslash (A \times B)$ est connexe.

Exercice 6. Dans cet exercice, on suppose connu que $\mathbb{R}$ est connexe dans sa topologie standard.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ n'est pas connexe dans la topologie boîte.

(b) Prouver que, par contre, $\mathbb{R}^\omega$ est connexe dans la topologie produit.

(c) Déterminer si $\mathbb{R}^\omega$ est connexe dans la topologie uniforme ou pas.