EPFL 9 décembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 12

L'exercice 6 peut être rendu le 23 décembre au début de la séance d'exercices.

Dans toute la série on considère $\mathbb{R}$ avec la topologie standard, c'est-à-dire avec la topologie d'ordre.

Exercice 1. **(a)** Montrer que la topologie d'ordre sur $(\mathbb{Q}, <)$ coïncide avec la topologie de sous-espace sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

(b) Quels sont les sous-espaces connexes et les sous-espaces connexes par arcs de $(\mathbb{Q}, <)$?

(c) Est-ce que $(\mathbb{Q}, <)$ est un continuum linéaire?

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons que pour chaque $x > 0$, la suite

$$f(x), f(2x), f(3x), \ldots, f(nx), \ldots$$

converge vers 0 si $n \to \infty$. Montrer que la fonction $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.
Indication: L'assertion est fausse si on considère une fonction continue des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Montrer qu'un ouvert U de l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est connexe si et seulement si U est connexe par arcs.

Exercice 4. Montrer que le carré unité $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ muni de l'ordre lexicographique est un continuum linéaire.

Exercice 5. Montrer que I^2 de l'exercice 4 est connexe mais pas connexe par arcs.
Indication: Utiliser le Théorème de la valeur intermédiaire et le fait que I est indénombrable.

Exercice 6. Trouver un continuum linéaire qui n'admet pas de plongement dans $\mathbb{R}$.
Indication: Ne pas chercher trop loin.