EPFL 16 décembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 13

L'exercice 1 peut être rendu dans la semaine du 20 février au début de la séance d'exercices.

Définition. Soient $(X, \mathcal{T}(X))$ et $(Y, \mathcal{T}(Y))$ des espaces topologiques. Notons par

$$\pi_0(X) = \{X_i\}_{i \in I}$$

l'ensemble des composantes connexes de X. A toute application continue $f : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \mathcal{T}(Y))$, on fait correspondre une application d'ensembles

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

définie comme suit: pour tout $x \in X$, si C_x est la composante de X contenant x, alors $\pi_0(f)(C_x)$ est la composante de Y contenant $f(x)$.

Exercice 1.

(a) Montrer que la correspondance suivante est bien définie:

$$\pi_0 : \{ \text{ applications continues } \} \longrightarrow \{ \text{ applications ensemblistes } \}.$$

(b) Etant données des applications continues $f : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \mathcal{T}(Y))$, $g : (Y, \mathcal{T}(Y)) \to (Z, \mathcal{T}(Z))$, montrer que $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$. Dans ce cas, on dit aussi que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(X) \arrow[rr, "\pi_0(f)"] \arrow[dr, "\pi_0(g\circ f)"'] & & \pi_0(Y). \arrow[dl, "\pi_0(g)"] \\
& \pi_0(Z) &
\end{tikzcd}$$

(c) Si $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{T}(X)) \to (X, \mathcal{T}(X))$ est la fonction identité, montrer que $\pi_0(\mathrm{Id}_X) : \pi_0(X) \to \pi_0(X)$ est l'identité $\mathrm{Id}_{\pi_0(X)}$.

(d) Prouver que si $f : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \mathcal{T}(Y))$ est un homéomorphisme, alors l'application induite $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection d'ensembles.

Le nombre de composantes d'un espace topologique fournit donc un exemple d'invariant topologique, fréquemment utilisé en topologie algébrique.

Exercice 2.

(a) Un produit $\left(\prod_{i \in I} X_i, \circledast_{i \in I} \mathcal{T}_i\right)$ d'espaces, où chaque $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est connexe par arcs, est-il aussi connexe par arcs?

(b) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Si $A \subset X$ est un sous-ensemble tel que $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe par arcs, est-ce que l'adhérence de A est connexe par arcs aussi?

(c) Soient $(X, \mathcal{T}(X))$ et $(Y, \mathcal{T}(Y))$ des espaces topologiques. Si $f : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \mathcal{T}(Y))$ est une application continue et $(X, \mathcal{T}(X))$ est connexe par arcs, est-ce que l'espace $(f(X), \mathcal{T}_{f(X)})$ est aussi connexe par arcs?

(d) Si $\{(A_i, \mathcal{T}_{A_i})\}_{i \in I}$ est une collection de sous-espaces connexes par arcs d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, avec la propriété que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, est-ce que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est aussi connexe par arcs?

Exercice 3.

(a) Munissons $\mathbb{R}$ de sa topologie standard $\mathcal{T}$, et considérons aussi le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$, avec la topologie induite de sous-espace $\mathcal{T}_{S^1}$. Soit $f : (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ une application continue. Démontrer qu'il existe un point x de S^1 tel que $f(x) = f(-x)$.

(b) Soit $f : (X, \mathcal{T}(X)) \to (X, \mathcal{T}(X))$ une application continue. Démontrer que si $X = [0, 1]$, alors il existe un point $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$. Le point x est appelé un *point fixe* de f. Qu'est-ce qu'on peut dire si $X = [0, 1[$ ou si $X =]0, 1[$?

Exercice 4. Montrer que la droite $\mathbb{R}$ avec la topologie standard, l'intervalle $I = [0, 1]$, vu comme sous-espace de $\mathbb{R}$, et $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, vu comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$, ne sont pas homéomorphes deux à deux.

Exercice 5.

(a) Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur un ensemble X. Supposons que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. Qu'est-ce que la compacité de X par rapport à une de ces deux topologies, implique-t-elle concernant la compacité par rapport à l'autre?

(b) Démontrer que si X est compact et de Hausdorff par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, alors soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont égales, soit elles ne sont pas comparables.

Exercice 6.

(a) Montrer que si on munit $\mathbb{R}$ de la topologie du complément fini (cf. Exercice 2, Série 11), alors tout sous-espace de $\mathbb{R}$ est compact.

(b) Supposons maintenant que $\mathbb{R}$ est muni de la topologie dont les ouverts U sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R} \setminus U$ est soit dénombrable, soit égal à tout $\mathbb{R}$. Dans ce cas, est-ce que l'intervalle $[0, 1]$ est un sous-espace compact de $\mathbb{R}$?