EPFL 23 décembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 14

L'exercice 5 peut être rendu dans la semaine du 20 février au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Démontrer que si $(Y, \mathcal{T}')$ est compact, alors la projection $\pi_X : (X \times Y, \mathcal{T} * \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ est une application fermée.
Indication: Utiliser le Lemme du Tube.

Exercice 2. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ une application entre espaces topologiques, avec $(Y, \mathcal{T}')$ compact et de Hausdorff. Démontrer que f est continue si et seulement si le **graphe** de f

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

est fermé dans $(X \times Y, \mathcal{T} * \mathcal{T}')$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Posons

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}, \text{ où } \infty \text{ dénote un point tel que } \infty \notin X,$$

$$\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{U \cup \{\infty\} | U \in \mathcal{T} \text{ et } X \backslash U \text{ compact}\}.$$

Démontrer que:

(a) $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ est un espace topologique,

(b) $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ est compact.

L'espace $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ est appelé le **compactifié d'Alexandroff** de $(X, \mathcal{T})$.

Exercice 4.

(a) Montrer que le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ avec sa topologie standard est homéomorphe au cercle S^1, vu comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

(b) Prouver que le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{N}^*$ avec la topologie discrète est homéomorphe au sous-espace $X = \{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathbb{R}$, muni de sa topologie standard.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact, de Hausdorff et tel que aucun de ses singletons n'est ouvert. Prouver que si l'ensemble X a plus qu'un point, alors $(X, \mathcal{T})$ est un espace non-dénombrable.
Indications:

(i) *Montrer que si U est un ouvert non-vide de X, et si $x \in X$, alors il existe un ouvert V dans X, tel que $V \subset U$, mais $x \notin \overline{V}$;*

(ii) *Par absurde, supposer qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N}^* \to X$. Utiliser le point (i) et la compacité de X (penser à la PIF) pour aboutir à une contradiction.*

Exercice 6. Montrer que tout sous-espace compact d'un espace métrique $(X, \mathcal{T}_d)$ est borné dans la métrique d, et qu'il est aussi fermé.
D'autre part, trouver un exemple d'un espace métrique dans lequel il existe des sous-espaces fermés et bornés qui ne sont pas compacts.