EPFL 22 février 2012
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 15

L'exercice 1 peut être rendu le 7 mars au début de la séance d'exercices.

Exercice 1.
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique de Hausdorff. Monter que toute intersection de sous-espaces compacts de X est compacte.

Exercice 2.
Prouver que si $(X, <)$ est un ensemble ordonné tel que tout intervalle fermé est compact, alors $(X, <)$ possède la propriété de la borne supérieure (l.u.b.).

Exercice 3.
On rappelle que $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ et que la collection $\mathcal{B}_K = \{]a, b[\} \cup \{]a, b[\setminus K\}_{a,b\in\mathbb{R}}$ forme une base pour une topologie sur la droite réelle, notée $\mathcal{T}_K$. Considérons alors l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$.

(a) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas compact comme sous-espace de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$.

(b) Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ est connexe, mais pas connexe par arcs.

Exercice 4. Prouver qu'une isométrie entre deux espaces métriques est une application uniformément continue.

Exercice 5. Soit un espace métrique $(X, \mathcal{T}_d)$ qui n'est pas compact. Se convaincre, à l'aide d'un contre-exemple, que le Lemme du nombre de Lebesgue ne sera pas vérifié dans ce cas.