EPFL 29 février 2012
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 16

L'exercice 1 peut être rendu le 14 mars au début de la séance d'exercices.

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est **limite-compact** si tout sous-ensemble infini de X admet un point limite.

Exercice 1. Démontrer la proposition suivante:

Proposition 1. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact, alors il est limite-compact.

Exercice 2.

(a) Soit Y un ensemble qui contient deux points, muni de la topologie grossière, et soit l'ensemble $\mathbb{N}^*$, vu comme un espace discret. Montrer que l'espace produit $(\mathbb{N}^* \times Y, \mathcal{T}_{disc} * \mathcal{T}_{gr})$ est limite-compact, mais pas compact.

(Ainsi, la réciproque à la Proposition 1 est fausse.)

(b) Notons $\mathbb{R}_\ell$ la droite réelle munie de la topologie $\mathcal{T}_\ell$ de la limite inférieure, dont une base est donnée par la collection $\{[a, b)\}_{a,b \in \mathbb{R}}$. Est-ce que l'intervalle $[0, 1]$ est limite-compact en tant que sous-espace de $\mathbb{R}_\ell$?

Exercice 3. Prouver le résultat suivant:

Proposition 2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique métrisable. Si $(X, \mathcal{T})$ est limite-compact, alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge.

Remarque: Si toute sous-suite de X admet une sous-suite convergente, on dit que $(X, \mathcal{T})$ est **séquentiellement compact**.

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est **localement compact en** $x \in X$ s'il existe un sous-espace compact $(C, \mathcal{T}_C)$ et $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subseteq C$.
Si $(X, \mathcal{T})$ est localement compact pour tout $x \in X$, alors $(X, \mathcal{T})$ est **localement compact**.

Exercice 4.

(a) Vérifier qu'un espace compact est localement compact.

(b) Déterminer lesquels des espaces suivants sont localement compacts:

- un espace topologique discret $(X, \mathcal{T}_{disc})$;
- l'espace $\mathbb{R}$ avec la topologie standard;
- l'espace $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la limite supérieure, admettant comme base la collection $\{(a, b]\}_{a,b \in \mathbb{R}}$;
- $\mathbb{Q}$ comme sous-espace de $\mathbb{R}$, avec la topologie induite par la topologie standard.

Exercice 5. Démontrer le résultat suivant:

Proposition 3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff. Alors $(X, \mathcal{T})$ est localement compact *si et seulement si* pour tout $x \in X$ et pour tout $U \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in U$, il existe $V \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in V$, $\overline{V}$ est compact et $\overline{V} \subseteq U$.

Indications: Le sens inverse est facile à montrer. Pour prouver le sens direct, on aura besoin de considérer le compactifié d'Alexandroff $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ de $(X, \mathcal{T})$.

- Revoir l'Exercice 3 de la Série 14 pour la construction de $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$. Noter en particulier que la compacité de $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ a déjà été établie.

- Montrer que $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ est de Hausdorff.

- Etant donné $x \in U \in \mathcal{T}$, considérer le compact $C := \hat{X} \backslash U$. Utiliser ensuite (entre autres) le Scholie du "Théorème sur la compacité et les sous-espaces" (cf. cours) pour trouver l'ouvert V désiré.

Exercice 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(X_n, \mathcal{T}_n)$ un espace topologique muni de la topologie discrète, tel que $\# \ X_n = n + 1$. Posons $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ et $\mathcal{T} = \circledast_{\in \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$. Est-ce que l'espace $(X, \mathcal{T})$ est compact?