EPFL 7 mars 2012
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 17

L'exercice 4 peut être rendu le 21 mars au début de la séance d'exercices.

Exercice 1.

(a) Montrer que tout ensemble simplement ordonné $(X, <)$, muni de la topologie d'ordre $\mathcal{T}_<$, est un espace topologique régulier.

(b) Prouver que si un espace $(X, \mathcal{T})$ est localement compact et de Hausdorff, alors il est régulier.

Exercice 2.

(a) Montrer que l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ n'est pas régulier.

(b) Est-ce que l'espace $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie produit est normal?

(c) Prouver que l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\ell)$ est normal.

(d) Prouver que l'espace $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\ell * \mathcal{T}_\ell)$ est régulier.

Exercice 3.
Prouver que si l'espace produit $(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathop{\ast}_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha)$ est, respectivement, de Hausdorff, régulier ou normal, alors chaque $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ est aussi de Hausdorff, régulier ou normal, pour tout $\alpha \in A$.

Exercice 4.
Soit $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ une application fermée, continue et surjective, telle que la préimage $p^{-1}(\{y\})$ est compacte pour tout $y \in Y$. Montrer que:

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, alors $(Y, \mathcal{T}')$ l'est aussi;

(b) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier, alors $(Y, \mathcal{T}')$ l'est aussi;

(c) Si$(X, \mathcal{T})$ est localement compact, alors $(Y, \mathcal{T}')$ l'est aussi.

On a vu au cours qu'un sous-espace d'un espace régulier est aussi régulier, et que les produits arbitraires d'espaces réguliers sont réguliers. Mais les choses ne marchent pas aussi bien pour les espaces normaux...

Exercice 5.
Montrer qu'un sous-espace *fermé* d'un espace normal est normal.

Observation 1. Le produit d'espaces normaux n'est pas forcément normal!

Un contre-exemple classique est le **plan de Sorgenfrey** qui est l'espace $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\ell * \mathcal{T}_\ell)$. Pour voir qu'il n'est pas normal, on considère la droite $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$. On peut montrer que le sous-espace A de Y, formé de points avec les coordonnées rationnelles, est fermé dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\ell * \mathcal{T}_\ell)$, de même que son complémentaire $Y \backslash A$. Mais il n'existe pas deux ouverts disjoints de $\mathcal{T}_\ell * \mathcal{T}_\ell$ qui contiennent A et $Y \backslash A$ respectivement.
La preuve de ce résultat est assez technique, on réfère les curieux à l'Exercice 9 du §31 du livre de Munkres pour les détails!

Observation 2. On a une inclusion stricte {espaces réguliers} $\subsetneq$ {espaces normaux}.

En combinant l'Exercice 4(d) et l'Observation 1, nous avons un premier exemple d'un espace régulier, qui n'est pas normal, c'est $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\ell * \mathcal{T}_\ell)$.

Un autre exemple d'un espace régulier qui n'est pas normal est le **plan de Moore (ou le plan de Niemytskii)**. Il s'agit de l'espace $\Gamma = H \cup \mathbb{R} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, où la topologie est définie comme suit. Le demi-plan supérieur H est muni de sa topologie de sous-espace $\mathcal{T}_H$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{st,2})$. Par contre, pour tout point $(x,0) \in \mathbb{R}$, un voisinage ouvert autour de $(x,0)$ est de la forme $\{x\} \cup D$, où D est un disque ouvert dans H, qui est tangent à $\mathbb{R}$ en x.