EPFL 21 mars 2012
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 18

L'exercice 3 peut être rendu le 4 avril au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. *Groupes profinis*
Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné, où $\leqslant$ est un ordre partiel non-strict, tel que pour tous $i, j \in I$ il existe $k \in I$ avec $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$.

Considérons un système $\{G_i\}_{i\in I}$ où $(G_i, *)$ est un groupe fini pour tout $i \in I$, vu également comme un espace topologique discret $(G_i, \mathcal{T}_{disc})$. On se donne de plus pour tout couple $(i, j) \in I \times I$ avec $j \leqslant i$, un homomorphisme de groupes $\varphi_{ij} : G_i \to G_j$ qui vérifie:

(i) $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{G_i}$, pour tout $i \in I$;

(ii) pour tous $i, j, k \in I$ tels que $k \leqslant j \leqslant i$, $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$.

On pose

$$G := \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i : \varphi_{ij}(g_i) = g_j, \forall i \geqslant j \right\}.$$

(a) Expliciter la structure de groupe sur le produit $\prod_{i\in I} G_i$ et montrer que G est un sous-groupe de $\prod_{i\in I} G_i$.

(b) Notons $\mathcal{T}_G$ la topologie de sous-espace que G hérite de $\left(\prod_{i\in I} G_i, \circledast_{i\in I} \mathcal{T}_{disc}\right)$. Prouver que le sous-espace $(G, \mathcal{T}_G)$ est fermé dans $\left(\prod_{i\in I} G_i, \circledast_{i\in I} \mathcal{T}_{disc}\right)$. On appelle $(G, \mathcal{T}_G)$, obtenu de cette façon, un *groupe profini.*

(c) Montrer que $(G, \mathcal{T}_G)$ est un espace de Hausdorff, et qu'il est compact.

(d) Montrer que les opérations multiplication $\mu : (G \times G, \mathcal{T}_G * \mathcal{T}_G) \to (G, \mathcal{T}_G)$ et inverse $\nu : (G, \mathcal{T}_G) \to (G, \mathcal{T}_G)$, trouvées en (a), sont continues.

(e) Est-ce que $(G, \mathcal{T}_G)$ est un espace régulier? Normal?

Un exemple classique de groupe profini est donné par le groupe des entiers p-adiques, $\mathbb{Z}_p^{\wedge}$, obtenu en appliquant la construction précédente comme suit. Comme ensemble d'indices on prend $(\mathbb{N}, \leqslant)$ avec son ordre usuel, et on pose $G_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les applications $\varphi_{n,m} : G_n \to G_m$ sont alors les homomorphimes quotient $q_{n,m} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, pour $m \leqslant n$.

Exercice 2. Prouver la réciproque au Lemme d'Urysohn:
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique où tous les singletons sont fermés. Si pour toute paire de fermés disjoints F_0, F_1 dans X il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$, telle que $f(F_0) = \{0\}$ et $f(F_1) = \{1\}$, alors $(X, \mathcal{T})$ est normal.

Exercice 3.
Prouver le Lemme d'Urysohn pour un espace métrique $(X, \mathcal{T}_d)$, en posant

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

pour la définition de la fonction $f : X \to [0, 1]$ figurant dans l'énoncé du Lemme.
On rappelle que $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ pour tout $A \subseteq (X, \mathcal{T}_d)$.

Définition 1. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit **complètement régulier** si tout singleton de X est fermé, et si pour tout point $x_0 \in X$ et tout sous-ensemble fermé $F \subset X$ qui ne contient pas x_0, il existe une fonction continue $f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(F) = \{1\}$.

Par exemple, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\ell)$ est un espace complètement régulier.

Exercice 4.

(a) Montrer qu'un sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier.

(b) Prouver que "normal $\Rightarrow$ complètement régulier $\Rightarrow$ régulier" pour un espace topologique.

(c) Montrer qu'un produit d'espaces complètement réguliers est complètement régulier.

(d) Montrer que tout espace topologique qui est localement compact et de Hausdorff est complètement régulier.