EPFL 23 septembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 1

L'exercice 3 peut être rendu aux assistants le 7 octobre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1.

(a) Démontrer la deuxième loi de distributivité et les lois de De Morgan pour $\cup$ et $\cap$.

(b) Formuler et démontrer les lois de De Morgan pour les réunions et intersections généralisées.

Exercice 2. Soit $\mathcal{A}$ une collection non-vide d'ensembles. Déterminer lesquelles des affirmations suivantes sont vraies:

(a) $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ pour au moins un $A \in \mathcal{A}$;

(b) $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$;

(c) $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ pour au moins un $A \in \mathcal{A}$;

(d) $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Écrire la contraposée de chacune des affirmations **(a)**-**(d)**.

Exercice 3. Soient $f : A \to B$ une application ensembliste, $A_0 \subset A$ et $B_0 \subset B$. Prouver que

(a) $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$, avec égalité si f est injective;

(b) $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$, avec égalité si f est surjective.

Exercice 4. Soit $f : A \to B$ une application ensembliste, et soient $A_i \subset A$ et $B_i \subset B$ pour $i = 0, 1$. Montrer que l'opération préimage f^{-1} préserve les inclusions, les réunions, les intersections et les compléments:

(a) $B_0 \subset B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$;

(b) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$;

(c) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$;

(d) $f^{-1}(B_0 \backslash B_1) = f^{-1}(B_0) \backslash f^{-1}(B_1)$.

Montrer que, par contre, l'image par f préserve seulement les inclusions et les réunions, i.e., que l'on a:

(e) $A_0 \subset A_1 \Rightarrow f(A_0) \subset f(A_1)$;

(f) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$;

(g) $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$, l'égalité étant vraie si f est injective;

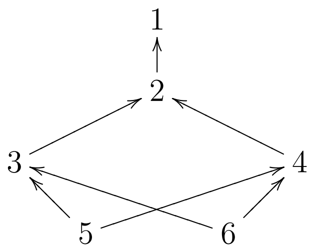
(h) $f(A_0 \backslash A_1) \supset f(A_0) \backslash f(A_1)$, l'égalité étant vraie si f est injective.

Exercice 5. Soit $(A, <_A)$ un ensemble ordonné et $b \notin A$. Définir une relation $<_B$ sur $B := A \cup \{b\}$ comme suit:

$$x <_B y \quad \text{ssi} \quad (x, y \in A \text{ et } x <_A y) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y = b).$$

Montrer que $<_B$ définit un ordre (strict) sur B et que $<_B \cap (A \times A) = <_A$.

Exercice 6. Considérer l'ensemble $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ordonné à l'aide du diagramme ci-dessous.



Soit le sous-ensemble $A = \{2, 3, 4\}$ de X. Répondre aux questions suivantes:

(a) Trouver les éléments maximaux et minimaux de X.

(b) Déterminer si X possède un plus grand et un plus petit élément.

(c) Quels sont les majorants de A? Les minorants de A?

(d) Est-ce que le $\sup A$ existe? Qu'en est-il du $\inf A$?