EPFL 30 septembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 2

L'exercice 1 peut être rendu aux assistants le 14 octobre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. **(a)** Soit $\mathcal{T}$ la famille définie par

$$\mathcal{T} := \{\mathbb{R}, \varnothing\} \cup \{A_q =]q, \infty[\,\}_{q \in \mathbb{Q}}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ n'est pas une topologie sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\mathcal{T}'$ la famille définie par

$$\mathcal{T} := \{\mathbb{R}, \varnothing\} \cup \{E_a =]a, \infty[\,\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

Montrer que $\mathcal{T}'$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $\mathcal{T}''$ la famille donnée par

$$\mathcal{T}'' := \{\mathbb{N}, \varnothing\} \cup \{E_n = \{n, n+1, n+2, ...\}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Montrer que $\mathcal{T}''$ est une topologie sur $\mathbb{N}$ et déterminer les ouverts contenant l'entier positif 6.

Exercice 2. Soit X un espace topologique et soit A un sous-ensemble de X. Supposons que pour tout $x \in A$ il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset A$. Démontrer que A est ouvert dans X.

Exercice 3. Soit A un ensemble quelconque.

1. Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une famille de topologies sur X, démontrer que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X. Est-ce que $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X?

2. Soit $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de topologies sur X. Démontrer qu'il existe une unique topologie la plus grossière sur X qui contient toutes les collections $\mathcal{T}_\alpha$, et une unique topologie la plus fine contenue dans toutes les $\mathcal{T}_\alpha$.

3. Si $X = \{a, b, c\}$, soit $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. Trouver la topologie la plus grossière qui contient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, et la topologie la plus fine contenue dans $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

Exercice 4. Considérer les topologies suivantes sur $\mathbb{R}$:

$\mathcal{T}_1$ = la topologie standard,

$\mathcal{T}_2$ = la topologie de $\mathbb{R}_K$,

$\mathcal{T}_3$ = la topologie du complément fini,

$\mathcal{T}_4$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $(a, b]$ comme base,

$\mathcal{T}_5$ = la topologie avec tous les intervalles $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$ comme base.

Pour chacune, déterminer lesquelles des autres topologies elle contient.