EPFL 7 octobre 2010
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

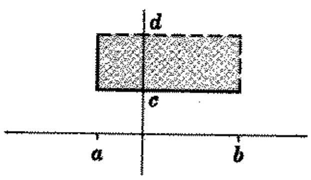
# Série 3

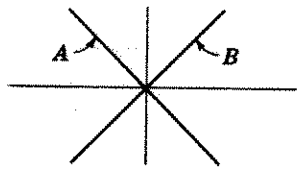
**L'exercice 1 peut être rendu le 21 octobre au début de la séance d'exercices.**

*Dans toute la série, $I$ dénote l'intervalle fermé* $[0,1]$.

**Exercice 1.** Soit $\mathcal{B}$ la famille des rectangles semi-ouverts du plan $\mathbb{R}^2$, représentés ci-dessous et définis par

$$R \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x < b, c \leq y < d\}.$$




**(a)** Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sur $\mathbb{R}^2$.

**(b)** Prouver que la topologie induite $\mathcal{T}_A$ sur la droite $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ est la topologie discrète sur $A$.

**(c)** Prouver que la topologie induite $\mathcal{T}_B$ sur la droite $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\}$ n'est pas la topologie discrète sur $B$.

**Exercice 2.**

**(a)** Soit $X = \{a,b,c,d,e\}$ un ensemble à 5 éléments. On munit $X$ de la topologie suivante:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,e\}, \{a,b,c,d\}, X\}.$$

Déterminer les ouverts de la topologie de sous-espace $\mathcal{T}_A$, induite sur le sous-ensemble $A = \{a,c,e\}$ de $X$.

**(b)** On considère la droite réelle $\mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle, et l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants de $I$ est ouvert ou non dans la topologie de sous-espace $\mathcal{T}_I$: $]\frac{1}{2},1]$, $]\frac{1}{2},\frac{2}{3}[$, $]0,\frac{1}{2}]$.

**(c)** Considérer l'ensemble $Y = [-1,1]$ comme un sous-espace de $\mathbb{R}$, muni de sa topologie standard. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont ouverts dans $Y$? Et dans $\mathbb{R}$?

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| < 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}, \quad E = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1 \text{ et } \frac{1}{x} \notin \mathbb{N}^*\}.$$

**Exercice 3.** Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un sous-espace de $X$, où $\mathcal{T}_Y$ dénote la topologie induite sur $Y$. Montrer que si $U$ est ouvert dans $Y$, et $Y$ est ouvert dans $X$, alors $U$ est ouvert dans $X$.

**Exercice 4.** On munit l'ensemble $X = \{a, b, c\}$ de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ et l'ensemble $X' = \{u, v\}$ de la topologie $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \{u\}, X'\}$.

**(a)** Déterminer une sous-base $\mathcal{S}$ de la topologie produit $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$ sur $X \times X'$.

**(b)** Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$.

**Exercice 5.** On considère la droite réelle $\mathbb{R}$ avec son ordre strict total usuel, et on munit l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la relation d'ordre lexicographique $<$ (cf. cours).

**(a)** Déterminer et représenter graphiquement les ouverts de base pour la topologie d'ordre lexicographique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, notée $\mathcal{T}_<(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. (Vous devriez trouver des ouverts de base de deux types différents ici.)

**(b)** Expliquer pourquoi on peut se restreindre, en fait, à un seul type d'ouverts trouvés précédemment, pour former la base de $\mathcal{T}_<(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$?

Considérons maintenant le carré-unité $I \times I$. On le munit de la relation d'ordre lexicographique, obtenue comme restriction de l'ordre lexicographique $<$ défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**(c)** La topologie d'ordre lexicographique $\mathcal{T}_<(I \times I)$ sur $I \times I$, est-elle la même que la topologie induite de sous-espace $\mathcal{T}_{I \times I}$?

**(d)** Comparer les topologies $\mathcal{T}_<(I \times I)$ et $\mathcal{T}_{I \times I}$ avec la topologie produit $\mathcal{T}_I * \mathcal{T}_I$ sur $I \times I$.