EPFL
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

14 octobre 2011

Série 4

L'exercice 2 peut être rendu le 28 octobre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}$, définie par

$$\mathcal{T} := \{\mathbb{R}, \varnothing\} \cup \{E_a =]a, \infty[\,\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

(a) Quels sont les sous-ensembles fermés de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$?

(b) Déterminer l'adhérence des ensembles $[3, 7[$, $\{7, 24, 47, 85\}$ et $\{3, 6, 9, 12, ...\}$.

On considère maintenant $\mathbb{N}$ muni de la topologie $\mathcal{T}'$ définie par

$$\mathcal{T}' := \{\mathbb{N}, \varnothing\} \cup \{E_n = \{n, n+1, n+2, ...\}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

(c) Quels sont les sous-ensembles fermés de $(\mathbb{N}, \mathcal{T}')$?

(d) Déterminer l'adhérence des ensembles $\{7, 24, 47, 85\}$ et $\{3, 6, 9, 12, ...\}$.

Exercice 2.

(a) Démontrer que si A est fermé dans Y, et Y est fermé dans X, alors A est fermé dans X.

(b) Démontrer que si A est fermé dans X, et B est fermé dans Y, alors $A \times B$ est fermé dans $X \times Y$.

(c) Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$. Montrer que dans l'espace $X \times Y$, on a $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exercice 3. Notons par f l'application qui fait correspondre à chaque ensemble son intérieur, i.e., $f(A) = \overset{\circ}{A}$, et appelons g l'application qui fait correspondre à chaque ensemble son adhérence, i.e., $g(A) = \overline{A}$. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que f ne commute pas avec g.

Exercice 4. Soient A, B et $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ des sous-ensembles d'un espace topologique X. Soit I un ensemble d'indices quelconque. Prouver que:

(a) Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(c) $\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} \supset \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$. Donner un exemple où l'on n'a pas l'égalité.

Déterminer si les égalités suivantes sont satisfaites. Dans les cas contraire, déterminer lesquelles des inclusions $\subset$ ou $\supset$ sont vraies:

(d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

(e) $\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$,

(f) $\overline{A \smallsetminus B} = \overline{A} \smallsetminus \overline{B}$.

Exercice 5.
Soit $I^2 = [0,1] \times [0,1]$, muni de la topologie d'ordre lexicographique. Déterminer les adhérences des sous-ensembles suivants de I^2:

(a) $A = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$,

(b) $B = \{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$,

(c) $C = \{(x, 0) \mid 0 < x < 1\}$,

(d) $D = \{(x, \frac{1}{2}) \mid 0 < x < 1\}$,

(e) $E = \{(\frac{1}{2}, y) \mid 0 < y < 1\}$.