EPFL 21 octobre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 5

L'exercice 2 peut être rendu le 4 novembre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1.

(a) Prouver que tout sous-espace topologique d'un espace de Hausdorff est de Hausdorff.

(b) Prouver que le produit de deux espaces de Hausdorff est de Hausdorff.

(c) Prouver que tout ensemble ordonné $(X, <)$ muni de la topologie d'ordre $\mathcal{T}_<$ est un espace de Hausdorff.

Exercice 2. Montrer qu'un espace $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff si et seulement si sa diagonale $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in X\} \subset X \times X$ est fermée dans $(X \times X, \mathcal{T}_X * \mathcal{T}_X)$.

Etant donné un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, on peut imposer des conditions plus faibles sur la topologie de X, que la propriété de Hausdorff. Dans les exercices qui suivent, nous allons étudier un exemple d'une telle condition.

Définition 1. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ satisfait **l'axiome** T_1 si pour toute paire de points distincts x_1, x_2 de X, chacun des points appartient à un ouvert qui ne contient pas l'autre point. En d'autres mots, il existe deux ouverts U_{x_1} et U_{x_2} de $\mathcal{T}$ tels que

$$x_1 \in U_{x_1},\ x_2 \notin U_{x_1} \text{ et } x_2 \in U_{x_2},\ x_1 \notin U_{x_2}.$$

Noter que les ouverts U_{x_i} ne sont pas nécessairement disjoints ici.

Exercice 3.

(a) Prouver que tout sous-espace topologique d'un espace qui satisfait T_1, satisfait aussi T_1.

(b) Montrer qu'un espace $(X, \mathcal{T})$ satisfait l'axiome T_1 si et seulement si tout sous-ensemble fini de points de X est fermé.

(c) Montrer que tout espace fini qui satisfait T_1 est un espace discret.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique qui satisfait T_1 (respectivement, qui est de Hausdorff). Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$ sur X, alors l'espace $(X, \mathcal{T}')$ satisfait aussi T_1 (respectivement, est aussi de Hausdorff).

Exercice 5. Considérer les cinq topologies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, introduites dans l'Exercice 4 de la Série 2.

(a) Dans chacune de ces topologies, déterminer l'adhérence de l'ensemble $K = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$.
Indication: utiliser la caractérisation d'éléments d'adhérence par les ouverts de bases.

(b) Lesquelles de ces topologies satisfont-elles l'axiome de Hausdorff? Et l'axiome T_1?
Remarque: observer que "Hausdorff $\Longrightarrow T_1$".