EPFL
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

28 octobre 2010

Série 6

L'exercice 6 peut être rendu le 11 novembre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}$, muni de la topologie du complément fini, définie par

$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini}\}.$$

(a) Vers quel(s) point(s) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n = \frac{1}{n}$, converge-t-elle?

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, dont les termes sont tous distincts. Montrer que (a_n) converge vers tout nombre réel $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient X un ensemble infini et la famille

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ est dénombrable}\}.$$

(a) Vérifier que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

(b) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X converge vers $x \in X$ si et seulement si (x_n) est de la forme $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x, x, x, \ldots)$ pour un $n_0 \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Considérons l'ensemble $X = \{a, b, c, d\}$, muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X\big\},$$

et l'application $f : X \to X$ définie par

$$a \mapsto b,\ b \mapsto d,\ c \mapsto b,\ d \mapsto c.$$

(a) Montrer que f n'est pas continue en c.

(b) Montrer que f est continue en d.

Exercice 4. A l'aide d'un contre-exemple simple, montrer que l'image d'un espace qui satisfait l'axiome T_1 par une fonction continue, n'est pas nécessairement un espace qui satisfait T_1.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique d'un sous-espace $A \subseteq X$, donnée par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prouver que χ_A est continue en $x \in X$ si et seulement si x n'appartient pas au bord de A.
*Rappel: Le **bord** d'un ensemble $A \subseteq X$ est défini par $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.*

Exercice 6. Soient $f, g : X \to Y$ des applications continues d'un espace topologique X vers un espace de Hausdorff Y. Démontrer que l'ensemble $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.