EPFL 4 novembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 7

L'exercice 6 peut être rendu le 28 novembre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique quelconque et $(Y, \mathcal{T}_<)$ un espace topologique muni de la topologie d'ordre. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues.

(a) Montrer que l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ est fermé dans X.

(b) Soit $h : X \to Y$ la fonction définie pour tout $x \in X$ par $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Montrer que h est continue, en utilisant le Lemme de recollement.

Exercice 2.

(a) Trouver un exemple d'une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue et fermée, mais pas ouverte.

(b) Considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Est-elle ouverte?

(c) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, les sous-espaces (a, b) et $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes à $(0, 1)$ et $[0, 1]$, respectivement.

Exercice 3. Soient $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ un homéomorphisme et $(A, \mathcal{T}_A)$ un sous-espace quelconque de $(X, \mathcal{T})$. Prouver que la restriction $f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (B, \mathcal{T}'_B)$, est également un homéomorphisme, où $B = f(A)$.

Exercice 4.

(a) Notons $\mathcal{M}at(\mathbb{R})_n$ l'ensemble de toutes les matrices réelles de taille $n \times n$. Pour tout $a = (a_{ij})$ et tout $r > 0$, posons

$$U_r(a) := \{(b_{ij}) \mid \forall\, i, j \text{ on a } |a_{ij} - b_{ij}| < r\}.$$

Montrer que la collection $\mathcal{B} = \{U_r(a)\}_{r,a}$ définit une base pour une topologie sur $\mathcal{M}at(\mathbb{R})_n$.

(b) Prouver que l'espace $(\mathcal{M}at(\mathbb{R})_n, \mathcal{T}_\mathcal{B})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$, muni de la topologie produit.

Exercice 5.

(a) La propriété pour un sous-espace de $\mathbb{R}$ d'être *borné*, est-elle un invariant topologique?

(b) En vous appuyant sur un exemple, montrer que *l'aire* n'est pas un invariant topologique.

(c) A l'aide d'un exemple, montrer qu'un homéomorphisme ne préserve pas forcément les *suites de Cauchy* dans $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6.

(a) Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques de Hausdorff. Démontrer que leur produit $X = \prod_{i \in I} X_i$, muni de la topologie produit $*_{i \in I}\, \mathcal{T}_i$, est aussi un espace de Hausdorff.

(b) Même question si la famille $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ satisfait l'axiome de séparation T_1.