EPFL 11 novembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 8

L'exercice 2 peut être rendu le 25 novembre au début de la séance d'exercices.

Définition 1. Soit $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ une famille d'espaces topologiques. Une base pour une topologie sur l'espace produit $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ est donnée par la collection

$$\mathcal{B}_{\text{Box}} := \big\{ \prod_{\alpha\in J} U_\alpha \,|\, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in J \big\}.$$

La topologie engendrée par cette base est appelée la **topologie boîte**; elle sera notée $\mathcal{T}_{\text{Box}}$.

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}$ avec sa topologie standard $\mathcal{T}$. Soit $\mathbb{R}^\omega$ le produit infini dénombrable de $\mathbb{R}$ avec soi-même, i.e., $\mathbb{R}^\omega := \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}$, et soit l'espace

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\omega \,|\, x_i \neq 0 \text{ seulement pour un nombre fini de valeurs de } i\}.$$

Quelle est l'adhérence de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\omega$ dans la topologie produit $\underset{n\in\mathbb{N}^*}{*} \mathcal{T}$, et dans la topologie boîte $\mathcal{T}_{\text{Box}}$?

Exercice 2. Soit $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ...)$ une suite de points dans l'espace produit $\big(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha, \underset{\alpha\in J}{*} \mathcal{T}_\alpha\big)$. Démontrer que $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ...)$ converge vers un point $\mathbf{x}$ si et seulement si la suite $(\pi_\alpha(\mathbf{x}^1), \pi_\alpha(\mathbf{x}^2), ...)$ converge vers $\pi_\alpha(\mathbf{x})$, où $\pi_\alpha : \big(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha\big) \to X_\alpha : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_\alpha$ dénote la projection pour tout $\alpha \in J$. Est-ce que ceci est aussi vrai si on munit $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ de la topologie boîte?

Exercice 3. Soit $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ une collection d'espaces topologiques et soient des sous-ensembles $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, pour tout $\alpha \in J$. Montrer que

$$\underset{\alpha\in J}{*} (\mathcal{T}_\alpha)_{Y_\alpha} = \big(\underset{\alpha\in J}{*} \mathcal{T}_\alpha\big)_{\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha},$$

i.e., que le produit des topologies induites sur les Y_α, coïncide avec la topologie produit, induite sur le sous-espace $\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$.

Exercice 4. Soit $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ une collection d'espaces topologiques et soient des sous-ensembles $A_\alpha \subseteq X_\alpha$, pour tout $\alpha \in J$. Prouver que l'on a

$$\prod_{\alpha\in J} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}$$

dans la topologie produit sur $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

Exercice 5. Soit $(M, \mathcal{T}_d)$ un espace métrique, et notons $F(M) \subset \mathcal{P}(M)$ l'ensemble de ses parties fermées, bornées et non-vides. Pour tout $\delta > 0$ et pour tout sous-ensemble non-vide $X \subseteq M$ on définit

$$X_\delta := \bigcup_{x \in X} \{m \in M \mid d(m, x) \leq \delta\},$$

l'ensemble des points de M qui sont à une distance inférieure ou égale à δ de X.
Considérons l'application

$$d_{\mathrm{H}} : F(M) \times F(M) \to \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \mapsto d_{\mathrm{H}}(X, Y) := \inf\{\delta > 0 \mid X \subseteq Y_\delta \text{ et } Y \subseteq X_\delta\}.$$

Montrer que d_{H} définit une métrique sur l'ensemble $F(M)$.

Indication: Observer qu'avec les hypothèses sur $F(M)$, vérifier la condition "$d_H(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$" équivaut à montrer que "$d_{\mathrm{H}}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \overline{X} = \overline{Y}$".

Cette métrique est appelée la **distance de Hausdorff**; elle est utilisée entre autres dans les processus de traitement d'images.

Exercice 6. Soit p un nombre premier fixé. Définissons $d_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ par

$$d_p(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{si } m = n, \\ \frac{1}{r}, & \text{où } m - n = p^{r-1}k, \text{ avec } r \in \mathbb{N}^*, \ k \in \mathbb{Z}, \text{ et } p \nmid k. \end{cases}$$

Montrer que d_p est une métrique sur $\mathbb{Z}$, qui induit une topologie autre que la topologie discrète sur $\mathbb{Z}$.