EPFL 18 novembre 2011
Topologie I
Prof. Kathryn Hess Bellwald
2ème année
2011-2012

Série 9

L'exercice 5 peut être rendu le 2 décembre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1. Quelle est l'adhérence de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\omega$, si on munit $\mathbb{R}^\omega$ de la topologie uniforme? (Voir la Série 7 pour les notations.)

Exercice 2. Dans les deux cas suivants, montrer que l'application donnée définit une métrique sur l'ensemble $\mathcal{C}[0,1]$ des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$d : \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx,$$

et

$$d' : \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \sup\big\{|f(x) - g(x)| \ : \ x \in [0,1]\big\}.$$

Exercice 3. Soient les métriques d et d' définies dans l'Exercice 2. Prouver que la topologie $\mathcal{T}_d$ induite par d est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d'}$ induite par d', i.e., qu'on a $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$.
A l'aide d'un contre-exemple, montrer que, par contre, on a $\mathcal{T}_{d'} \not\subset \mathcal{T}_d$.

Exercice 4. Donner un exemple qui montre que l'adhérence d'une boule ouverte

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

n'est pas nécessairement "la boule fermée"

$$\bar{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Exercice 5. Prouver que tout espace métrique $(X, \mathcal{T}_d)$ est un espace de Hausdorff.

Exercice 6. Considérons la topologie suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R}\backslash U \text{ est dénombrable}\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas un espace métrisable. On considère l'application $f := \mathrm{Id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{disc})$.

(a) Prouver que pour toute suite convergente $(x_n) \to x$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, on a que $f(x_n) \to f(x)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{disc})$. *Indication: Utiliser l'Exercice 2 de la Série 6.*

(b) Montrer que f n'est pas continue, et expliquer pourquoi cela permet de conclure que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable.