

## Série 1

27 octobre 2005

1.
  - (a) Vérifier que pour les applications continues  $X \rightarrow Y$ , l'homotopie est une relation d'équivalence.
  - (b) Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  des équivalences d'homotopie. Montrer que  $g \circ f$  est encore une équivalence d'homotopie. En déduire que l'équivalence d'homotopie entre espaces topologiques est une relation d'équivalence.
  - (c) Soit  $f, g : X \rightarrow Y$  des applications continues homotopes. Vérifier alors que  $f$  est une équivalence d'homotopie si  $g$  en est une.
  - (d) Vérifier que si
    - (i)  $f, f' : X \rightarrow Y$  sont homotopes
    - (ii)  $g, g' : Y \rightarrow Z$  sont homotopesalors  $g \circ f$  et  $g' \circ f'$  sont homotopes.
2.
  - (a) Soit  $A$  un sous-espace de  $X$  et  $r : X \rightarrow A$  une rétraction. Montrer que  $r$  est une application quotient.
  - (b) Prouver que  $D^2/S^1 \cong S^2$ .
3.
  - (a) Montrer que toute application continue  $f : S^n \rightarrow S^n$  telle que  $f(x) \neq -x$  pour tout  $x \in S^n$  est homotope à l'identité.
  - (b) Montrer que deux applications continues  $f, g : X \rightarrow S^n$  telles que  $f(x) \neq -g(x)$  pour tout  $x \in X$ , sont homotopes.
4.
  - (a) Vérifier que tout espace contractile est connexe par arcs.
  - (b) Montrer que si  $Y$  est contractile, alors  $[X, Y]$  ne contient qu'un seul élément pour tout espace  $X$ .
  - (c) Montrer que si  $X$  est contractile et si  $Y$  est connexe par arcs, alors  $[X, Y]$  ne contient qu'un seul élément.