Eléments d'homotopie
Prof. K. Hess-Bellwald

Série 13

9 février 2006

1.
Soit $T = S^1 \times S^1$, le tore. Il existe un isomorphisme entre $\pi_1(T)$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(a) Trouver un revêtement de T correspondant au sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par $(m, 0)$, où $m > 0$.
(b) Trouver un revêtement de T correspondant au sous-groupe trivial de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(c) Trouver un revêtement de T correspondant au sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par $(m, 0)$ et $(0, n)$, où $m, n > 0$.
(d) Existe-t-il d'autres revêtements du tore ?

2.
Trouver tous les revêtement (à équivalence près) de S^1.

3.
Soit $p : E \to B$ un revêtement entre espaces connexes par arcs et localement connexes par arcs, avec $p(e_0) = b_0$. Montrer que $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(B, b_0)$ si et seulement si il existe une équivalence $h : E \to E$ avec $h(e_1) = e_2$, pour tout couple de points e_1, $e_2 \in p^{-1}(b_0)$.

Pour le dernier exercice on va considérer G et G' des groupes topologiques et U (resp. U') un voisinage de l'élément neutre e (resp. e') de G (resp. G').

Définition. *On dit qu'une application continue $f : U \to G'$ est un homomorphisme local si $f(g_1.g_2) = f(g_1).f(g_2)$ pour tous g_1, g_2 dans U tels que $g_1.g_2$ est encore un point de U.*

Définition. *Un isomorphisme local de G vers G' est un homéomorphisme $f : U \to U'$ tel que f et f^{-1} sont des homomorphismes locaux.*

4.
Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme continue, avec G et G' connexes. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est un revêtement
(ii) Il existe un voisinage U de l'élément neutre e dans G tel que f restreint à U est un isomorphisme local de G vers G'.