Eléments d'homotopie
Prof. K. Hess-Bellwald

Série 1

26 octobre 2006

Exercice 1
Soient X et Y deux espaces topologiques et A un sous-espace de X. Soient $f,\ g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues telles que $f|_A = g|_A$. On définit une homotopie (si elle existe!) de f vers g relativement à A par:
$H : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ une application continue qui vérifie $H(0,-) = f$, $H(1,-) = g$ et $H(t,x) = f(x) = g(x)\ \forall\ x \in A\ et\ \forall\ t \in [0,1]$. Dans ce que cas on note $f \simeq_A g$.
Montrer que pour tout $h : A \longrightarrow Y$ la relation $\simeq_A$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les applications continues $f : X \longrightarrow Y$ telles que $f|_A = h$.

Exercice 2
Soient $h, h' : X \longrightarrow Y$ et $k, k' : Y \longrightarrow Z$ des applications continues telles que $h \simeq h'$ et $k \simeq k'$. Montrer que $k \circ h \simeq k' \circ h'$.

Exercice 3
Définition: On dit qu'un espace topologique (X, x_0) est **contractile** si $id_X : X \longrightarrow X$ est homotope à l'application constante $c_{x_0} : X \longrightarrow X$
.

- Montrer que tout convexe de $\mathbb{R}^n$ est contractile.

- Soit X et Y deux espaces topologiques tel que Y est un espace contarctile, montrer que $\mathbf{Top}(X,Y)/\simeq\ := [X,Y]$ se reduit à un seul élément.

Définition: On dit qu'in espace topologique X est **connexe par arcs** si $[I, X]$ se réduit à un seul élément, avec $I = [0,1]$.

Montrer que cette définition correspond à la définition habituelle des espaces connexes par arcs.

Montrer que si X est contractile et Y connexe par arcs alors $[X,Y]$ se réduit à un seul élément.