

Série 1

26 octobre 2006

Exercice 1

Soient X et Y deux espaces topologiques et A un sous-espace de X . Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues telles que $f|_A = g|_A$. On définit une homotopie (si elle existe!) de f vers g relativement à A par:

$H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ une application continue qui vérifie $H(0, -) = f$, $H(1, -) = g$ et $H(t, x) = f(x) = g(x) \forall x \in A$ et $\forall t \in [0, 1]$. Dans ce cas on note $f \simeq_A g$.

Montrer que pour tout $h : A \rightarrow Y$ la relation \simeq_A est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que $f|_A = h$.

Exercice 2

Soient $h, h' : X \rightarrow Y$ et $k, k' : Y \rightarrow Z$ des applications continues telles que $h \simeq h'$ et $k \simeq k'$. Montrer que $k \circ h \simeq k' \circ h'$.

Exercice 3

Définition: On dit qu'un espace topologique (X, x_0) est **contractile** si $id_X : X \rightarrow X$ est homotope à l'application constante $c_{x_0} : X \rightarrow X$.

- Montrer que tout convexe de \mathbb{R}^n est contractile.
- Soit X et Y deux espaces topologiques tel que Y est un espace contractile, montrer que $\mathbf{Top}(X, Y) / \simeq := [X, Y]$ se réduit à un seul élément.

Définition: On dit qu'un espace topologique X est **connexe par arcs** si $[I, X]$ se réduit à un seul élément, avec $I = [0, 1]$.

Montrer que cette définition correspond à la définition habituelle des espaces connexes par arcs.

Montrer que si X est contractile et Y connexe par arcs alors $[X, Y]$ se réduit à un seul élément.