Eléments d'homotopie
Prof. K. Hess-Bellwald
28 janvier 2007

Série 12 (Les Fibrations)

Exercice 1

Montrer que le produit de deux fibrations est encore une fibration.

Exercice 2

Montrer que relèvement d'homotopies à travers une fibration sont uniques à homotopie près (homotopie d'homotopies!!!).

Exercice 3

Définition (lifting function): Soit l'application continue $p : E \to B$. On note B^I l'espace des chemin sur B c'est à dire $\mathbf{Top}(I, B)$ muni de la topologie compact-ouvert et $\epsilon_0 : B^I \to B$ l'application d'évaluation en 0. On définit le diagramme de pullback (produit fibré) suivant:

$$\begin{tikzcd}
E^I \arrow[dr, dotted, "\pi"] \arrow[drr, bend left, "\hat{\epsilon_0}"] \arrow[ddr, bend right, "p^I"'] & & \\
& B^I \times_B E \arrow[r, "\hat{\epsilon_0}"] \arrow[d, "\bar{p}"] & E \arrow[d, "p"'] \\
& B^I \arrow[r, "\epsilon_0"] & B
\end{tikzcd}$$

S'il existe une application $\Gamma : B^I \times_B E \to E^I$ tel que $\pi\Gamma = id$ alors on dit que Γ est un relèvement (lifitng) de l'application $p : E \to B$.

Montrer qul'équivalence entre les trois propositions suivantes:

- Pour toute application $g : A \to E$ et toute homotopie $H : A \times I \to B$ telle que $H(-, 0) = pg$, il existe une homotopie $G : A \times I \to E$ telle que $G(-, 0)$ et $pG = H$.

- pour toute application $q : D \to A$ et pour tout morphisme d'application $(g, h) : q \to p$ et toute homotopie $H : A \times I \to B$ de h, il existe une homotopie $G : D \times I \to E$ de g telle que $(G, H) : q \times id_I \to p$ est un morphisme d'application.

- Il existe un relèvement (lifting) Γ de $p : E \to B$.

Exercice 4

Soit (B, b_0) un espace topologique basé, on définit PB l'espace des chemins basés, c'est à dire les chemin qui commence en b_0, et $\epsilon_1 : PB \to B$ l'application d'évaluation en 1 ($\epsilon_1(\lambda) = \lambda(1)$).

Montrer que $\epsilon_1 : PB \to B$ est une fibration.