Eléments d'homotopie
Prof. K. Hess-Bellwald
8 février 2007

Série 14 (Longue suite exacte de Serre et applications)

Exercice 1

Rappel: Soit $p : E \to B$ une fibration de fibre F. En utilisant la notion d'holonomie on définit la suite d'espace:

$$\dots \Omega^n F \xrightarrow{\Omega^n i} \Omega^n E \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n B \xrightarrow{\Gamma_n} \Omega^{n-1} F \dots \qquad F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B.$$

Pendant le cours, on a vu la construction de la longue suite de Serre, ainsi que l'exactitude au niveau de $\pi_n(E)$. On se propose de démontrer l'exactitude de la suite au niveau de $\pi_n(F)$.
Montrer que $\mathbf{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \mathbf{ker}(\pi_n i)$.
(*Astuce: Utilser l'adjonction de* Ω *et* Σ *ainsi que les propriétés de l'application d'holonomie.*)

Exercice 2

Dans cet exercice on se propose de montrer l'autre inclusion, c'est à dire $\mathbf{Im}(\partial_{n+1}) \supseteq \mathbf{ker}(\pi_n i)$, pour cela on procède par étape:
Prenons $[g] \in \pi_n(F)$ tel que $\pi_n i([g]) = [c_{e_0}]$, alors il existe $G : S^n \times I \to E$ tel qu'on ait le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_1"] & F \arrow[d, "i"] \\ S^n \times I \arrow[r, "G"] & E \end{tikzcd}$$

Soit $G^\sharp : S^n \to E^I$ l'adjoint de G.

- Montrer que $\Gamma(p^I \circ G^\sharp(z), e_0)(1) \in F$.

- Montrer que $g \simeq \Gamma(p^I \circ G^\sharp(-), e_0)(1)$. Puis conclure.

Exercice 3(Application)

Pour calculer les groupes $\pi_n(S^n)$ pour $n > 0$ on utilise les outils de la topologie différentielle, notre but n'étant pas d'approfondir cette théorie, on admet le résultat suivant: $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ pour $n > 0$.
Montrer que $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ et que $\pi_2(S^3) = 0$!!!

Exercice 4 (Calcul d'holonomie)

Calculer l'holonomie des fibrations suivantes:

- $\pi : \ F \times B \to B.$

- $\epsilon_0 \times \epsilon_1 : \ Y^I \to Y \times Y.$

- $\epsilon_1 : \ PY \to Y.$

- $g : \mathcal{L}Y \to Y$, où l'application g est définie comme étant le produit fibré de $\epsilon_0 \times \epsilon_1$, c'est à dire:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}Y \arrow[r, "\bar{\Delta}"] \arrow[d, "g"] & Y^I \arrow[d, "\epsilon_0 \times \epsilon_1"] \\ Y \arrow[r, "\Delta"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

Bonnes vacances !!!