Eléments d'homotopie
Prof. K. Hess-Bellwald

Série 2

2 novembre 2006

Exercice 1

Soit (X, a) un espace topologique pointé. On définit les espaces de chemins suivants:
$L^a(X) = \{f : [0,1] \to X \mid f(1) = a\}$.
$L_a(X) = \{f : [0,1] \to X \mid f(0) = a\}$.
$L(X) = \{f : [0,1] \to X\}$.
On munit ces espaces de la topologie compact-ouvert.
Montrer que l'application de concaténation:

$$\star : \; L^a(X) \times L_a(X) \longrightarrow L(X), \quad f, h \longmapsto f \star h$$

est une application continue.

Soit $p : X \longrightarrow Y$ une application continue, et soient $f \in L^a(X)$ et $g \in L_a(X)$. Montrer que

$$p \circ (f \star g) = (p \circ f) \star (p \circ g).$$

Exercice 2
Définition: Un sous espace A de X est un rétracte de X s'il existe une application continue $r : X \longrightarrow A$ telle que $r \circ i = id_A$ où $i : A \longrightarrow X$ est l'inculsion.
Définition: Soit A un sous espace X. Le couple (X, A) vérifie la propriété d'extension homotopique (PEH) si on a:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[r, "\forall\, H"] \arrow[d, "i"] & Z \\ X \times [0,1] \arrow[ur, dashed, "\exists\, K"] & \end{tikzcd}$$

Montrer que (X, A) vérifie $PEH \iff X \times \{0\} \cup A \times I$ est rétracte de $X \times I$.

Exercie 3
Soient le couple (X, A) qui vérifie la PEH et A contractile.

Monter que l'application quotient: $q : X \longrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.

Exercice 4
Soient X, Y et Z trois espaces topologiques, et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.
Montrer que p induit naturellement une application $p_* : [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$.

Exercice 5
Trouver tous les types d'homotopie des lettres de l'alphabet.
Donner des exemples de lettres de l'alphabet qui sont homotopes mais pas homéomorphes.