

Série 4

16 novembre 2006

Exercice 1

Définition Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, on définit l'espace topologique ΣX comme l'espace quotient de $X \times [0, 1]$ où on pose les identifications suivantes $(x, 1) \sim (y, 1)$ et $(x, 0) \sim (y, 0)$ et $(x_0, t) = (x_0, s)$
 Montrer que ΣX est connexe par arcs et calculer $\pi_1(\Sigma X, (x_0, t))$.

Exercice 2

Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés montrer qu'il existe un isomorphisme naturel qui identifie $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ et $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Exercice 3 (Produit amalgamé)

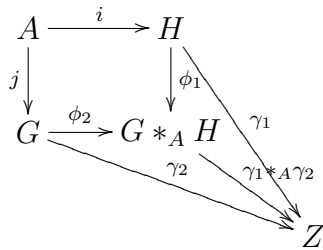
Soient $i : A \rightarrow G$ et $j : A \rightarrow H$ deux morphismes de groupes. On définit le produit $G *_A H$. Le groupe $G *_A H$ muni de deux homomorphisme de groupe: $\phi_1 : H \rightarrow H *_A G$ et $\phi_2 : G \rightarrow H *_A G$ tels que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & H \\ \downarrow j & & \downarrow \phi_1 \\ G & \xrightarrow{\phi_2} & G *_A H \end{array}$$

tel que pour tout diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & H \\ \downarrow j & & \downarrow \gamma_1 \\ G & \xrightarrow{\gamma_2} & Z \end{array}$$

il existe un unique homomorphisme de groupe $\gamma_1 *_A \gamma_2 : G *_A H \rightarrow Z$ qui fasse commuter le diagramme suivant:



Montrer l'existence de $H *_A G$. (Astuce: considerer le produit libre $G * H$)
 Montrer l'unicité à isomorphisme **unique** près de $H *_A G$ pour tout i, j .
question facultative: Quel est le lien avec le théorème de Seifert-Van Kampen?

Exercice 4

Théorème: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

En utilisant le théorème de Seifert-Van Kampen calculer: $\pi_1(S^1 \times S^1)$

Trouver un exemple qui montre la nécessité de la condition: $A_\alpha \cap A_\beta$ soit connexe par arcs dans le théorème de Seifert-Van Kampen.