Eléments d'homotopie
Prof. K. Hess-Bellwald

Série 4

16 novembre 2006

Exercice 1
Définition Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, on définit l'espace topologique ΣX comme l'espace quotient de $X \times [0,1]$ où on pose les identifications suivantes $(x, 1) \sim (y, 1)$ et $(x, 0) \sim (y, 0)$ et $(x_0, t) = (x_0, s)$
Montrer que ΣX est connexe par arcs et calculer $\pi_1(\Sigma X, (x_0, t))$.

Exercice 2
Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés montrer qu'il existe un isomorphisme naturel qui identifie $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ et $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Exercice 3 (**Produit amalgamé**)

Soient $i : A \to G$ et $j : A \to H$ deux morphismes de groupes. On définit le produit $G *_A H$. Le groupe $G *_A H$ muni de deux homomorphisme de groupe: $\phi_1 : H \to H *_A G$ et $phi_2 : G \to H *_A G$ tels que le diagrame suivant cummute:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & H \arrow[d, "\phi_1"] \\ G \arrow[r, "\phi_2"] & G *_A H \end{tikzcd}$$

tel que pour tout diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & H \arrow[d, "\gamma_1"] \\ G \arrow[r, "\gamma_2"] & Z \end{tikzcd}$$

il existe un unique homorphisme de groupe $\gamma_1 *_A \gamma_2 : G *_A H \to Z$ qui fasse commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & H \arrow[d, "\phi_1"] \arrow[ddr, "\gamma_1"] & \\
G \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[drr, "\gamma_2"] & G *_A H \arrow[dr, "\gamma_1 *_A \gamma_2"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Montrer l'existense de $H *_A G$. (Astuce: considerer le produit libre $G * H$)
Montrer l'unicité à isomorphisme **unique** près de $H *_A G$ pour tout $i,\ j$.
question facultative: Quel est le lien avec le théorème de Seifert-Van Kampen?

Exercice 4
Théorème: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.
En utilisant le théorème de Seifert-Van Kampen calculer: $\pi_1(S^1 \times S^1)$
Trouver un exemple qui montre la nécessité de la condition: $A_\alpha \cap A_\beta$ soit connexe par arcs dans le théorème de Seifert-Van Kampen.