Eléments d'homotopie
Prof. K. Hess-Bellwald

Série 9 (Les applications du groupe π_1)

21 décembre 2006

Lemme $k : S^1 \to X$ est homotope à l'application constante $\Leftrightarrow \pi_1 k$ induit un morphisme trivial $\Leftrightarrow k$ s'etend à une application continue $k : B^2 \to X$.

Exercice 1
Soit $h : S^1 \to S^1$ une application continue homotope à l'application constante.
Montrer que h fixe au moins un point.

Exercice 2 (**Théorème de points fixes de Brouwer**)
Soit $h : B^2 \to B^2$ une application continue de la boule fermée dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer que h a au moins un point fixe.

Exercice 3 (**Théorème fondamental d'algèbre**)
On se propose de démontrer un théorème d'algèbre en utilisant les techniques de la théorie du groupe fondamental:
Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé (i.e. s'écrit comme produit de polynômes de degré 1).

- Montrer que l'application $f_n : S^1 \to S^1$ qui envoie z vers z^n induit un homorphisme $\pi_1 f$ injectif.
- Montrer que l'application $g : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ qui envoie z vers z^n est non homotope à l'application constante.
- Montrer que tout polynôme
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$
tel que
$$\mid a_{n-1} \mid + \cdots + \mid a_1 \mid + \mid a_0 \mid < 1$$
a une racine dans B^2.
- Montrer le théorème fondamental d'algèbre.

Joyeuses fêtes de fin d'année !!!