

Série 1

Exercice 1. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux fonctions continues. Montrer que $f \simeq g \iff \exists K : X \rightarrow Y^I$ continue telle que

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \\
 & \nearrow f & \uparrow ev_0 \\
 X & \xrightarrow{K} & Y^I \\
 & \searrow g & \downarrow ev_1 \\
 & & Y
 \end{array}$$

commute, où Y^I désigne l'espace des fonctions continues de $I = [0, 1]$ dans Y .

Exercice 2. a) Montrer que \simeq est une relation d'équivalence sur $[X, Y]$ et que \simeq_* est une relation d'équivalence sur $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$.

b) Montrer que \simeq est une relation d'équivalence sur la classe des espaces topologiques.

Exercice 3. a) Montrer que $f \simeq f' : X \rightarrow Y$, $g \simeq g' : Y \rightarrow Z$ implique $g \circ f \simeq g' \circ f' : X \rightarrow Z$.

b) Même question dans le cas pointé.

Exercice 4. Trouver un exemple qui montre la différence entre \simeq et \simeq_* .

Exercice 5. Montrer que si X est un sous-espace convexe de \mathbb{R}^n , alors $\forall x_0 \in X$ on a

$$X \simeq \{x_0\}.$$

Exercice 6. a) Montrer que tout espace contractile est connexe par arcs.

b) Montrer que si Y est contractile, alors $[X, Y]$ est réduit à un seul élément, quelque soit X .

c) Montrer que si X est contractile et Y connexe par arcs, alors $[X, Y]$ ne contient qu'un seul élément.