Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess Hiver 07

Série 1

Exercice 1. Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux fonctions continues. Montrer que $f \simeq g \iff \exists\, K : X \longrightarrow Y^I$ continue telle que

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "K"] \arrow[dr, "g"'] & Y^I \arrow[u, "ev_0"'] \arrow[d, "ev_1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

commute, où Y^I désigne l'espace des fonctions continues de $I = [0,1]$ dans Y.

Exercice 2. a) Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $[X, Y]$ et que $\simeq_*$ est une relation d'équivalence sur $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$.

b) Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur la classe des espaces topologiques.

Exercice 3. a) Montrer que $f \simeq f' : X \longrightarrow Y,\ g \simeq g' : Y \longrightarrow Z$ implique $g \circ f \simeq g' \circ f' : X \longrightarrow Z$.

b) Même question dans le cas pointé.

Exercice 4. Trouver un exemple qui montre la différence entre $\simeq$ et $\simeq_*$.

Exercice 5. Montrer que si X est un sous-espace convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $\forall x_0 \in X$ on a

$$X \simeq \{x_0\}\,.$$

Exercice 6. a) Montrer que tout espace contractile est connexe par arcs.

b) Montrer que si Y est contractile, alors $[X, Y]$ est réduit à un seul élément, quelque soit X.

c) Montrer que si X est contractile et Y connexe par arcs, alors $[X, Y|$ ne contient qu'un seul élément.