Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess Hiver 07

Série 10

Exercice 1. Trouver une application continue et surjective $f : X \to Y$, où Y est connexe par arcs, telle qu'il existe $y_0, y_1 \in Y$ avec $f^{-1}(y_0) \not\simeq f^{-1}(y_1)$.

Exercice 2. Soit $f : X \to B$ une application continue entre espaces connexes par arcs. Soit $p : E \to B$ une fibration. Montrer que toute fibre de p a le même type d'homotopie que toute fibre de la fibration induite $\bar{p} : E \underset{B}{\times} X \to X$.

Exercice 3. Calculer explicitement les fibres et les fonctions de relèvement des fibrations suivantes:

(1) la fibration triviale $pr_2 : F \times B \to B$;
(2) la fibration chemins $p : Y^I \to Y \times Y : \lambda \mapsto \big(\lambda(0), \lambda(1)\big)$;
(3) la fibration chemins basés $p : P_*Y \to Y : \lambda \mapsto \lambda(1)$; et
(4) la fibration lacets libres $p : \mathcal{L}Y \to Y : \lambda \mapsto \lambda(0)$.

Exercice 4. Soit B un espace topologique, et soit $b_0 \in B$. Soit

$$\Omega B = \{\lambda \in B^I \mid \lambda(0) = b_0 = \lambda(1)\},$$

l'espace de lacets basés in b_0. Soit $F = p^{-1}(b_0)$.

Supposer que $\Gamma : B^I \underset{B}{\times} E \to E^I$ soit une fonction de relèvement. Utiliser Γ pour construire une application continue $\rho : F \times \Omega B \to F$. Calculer ρ explicitement pour toutes les fibrations de l'exercice précédent.

Exercice 5. Soit $p : E \to B$ une fibration dont la base B est connexe par arcs. Soit $j : F \hookrightarrow E$ l'inclusion de la fibre de p au dessus de $b_0 \in B$. Soit Z un espace topologique.

Montrer que la suite

$$[Z, F] \xrightarrow{j_*} [Z, E] \xrightarrow{p_*} [Z, B]$$

est exacte, où $j_*([f]) = [j \circ f]$ et $p_*([g]) = [p \circ g]$. Autrement dit, montrer que

$$p_* \circ j_*([f]) = [c_{b_0}] \quad \forall [f] \in [Z, F]$$

et

$$p_*([g]) = [c_{b_0}] \Longrightarrow \exists\, [f] \in [Z, F] \text{ telle que } j_*([f]) = [g].$$