Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess Hiver 07

Série 11

Exercice 1. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, et soit ΣX sa suspension réduite (confer série 5). Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccl} X \times I & \longrightarrow & \Sigma X \vee \Sigma X \\ (x,t) & \longmapsto & \begin{cases} [x', 2t] : 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ [x'', 2t-1] : \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

(où x' dénote la copie à gauche et x'' celle à droite dans $\Sigma X \vee \Sigma X$) induit une application continue pointée

$$q : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X \,.$$

Remarque 1. Noter que pour tout $n \geqslant 1$, on a $S^n \cong \Sigma S^{n-1}$.

Exercice 2. Utiliser l'application q pour définir une structure de groupe naturelle sur

$$[\Sigma X, Y]_*$$

pour tout $(X, x_0), (Y, y_0)$.

Exercice 3. Montrer que $\forall (X, x_0), (Y, y_0)$ il y a un isomorphisme de groupe

$$[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$$

naturel en X et en Y.

Corollaire 1. $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_1(\Omega^{n-1} X, *)$ $\forall n \geqslant 2$ *et donc (par l'exercice 2c), série 3)*

$$\pi_n(X, x_0) \text{ est abélien.}$$