Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess Hiver 07

Série 12

Exercice 1. Soit $p : E \to B$ une fibration de fibre F. En utilisant la notion d'holonomie on définit la suite

$$\cdots \pi_{n+1}B \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_{n+1}F \xrightarrow{\pi_n j} \pi_n E \xrightarrow{\pi_n p} \cdots$$

a) Montrer que $\Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\pi_n j)$.
b)* Montrer l'autre inclusion, i.e., $Ker(\pi_n j) \subset Im(\partial_{n+1})$.
On procède comme suit. Considérons $[g]_* \in \pi_n(F)$ tel que $\pi_n j([g]_*) = [c_{e_0}]_*$, alors il existe $G : S^n \times I \longrightarrow E$ tel que

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_1"'] & F \arrow[d, "j"] \\ S^n \times I \arrow[r, "G"] & E \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Soit $G^\# : S^n \longrightarrow E^I$ l'adjoint de G. Commencer par montrer que

$$\Gamma(p^I \circ G^\#(z), e_0)(1) \in F$$

puis que

$$g \simeq \Gamma(p^I \circ G^\#(-), e_0)(1)\,.$$

Ceci permet de conlcure.

Exercice 2. Calculer le connectant des fibrations suivantes :
a) $\Omega B \to P_* B \to B$
b) $\Omega B \to \mathcal{L}B \to B$
c) $F \to F \times B \to B$

Exercice 3. Montrer que

$$\pi_k S^n \cong \pi_k \mathbb{R}P^n \ \ \forall k \geqslant 2$$

et que

$$\pi_1 \mathbb{R}P^n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ \ \forall n \geqslant 2\,.$$

Exercice 4. Montrer que

$$\pi_k \mathbb{C}P^n \cong \pi_k S^{n+1} \ \ \forall k \geqslant 3$$

et que

$$\pi_2 \mathbb{C}P^n = \mathbb{Z} \ \ \forall n \geqslant 2\,.$$

Exercice 5. Calculer les groupes d'homotopie de la bouteille de Klein.