

## Série 12

**Exercice 1.** Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration de fibre  $F$ . En utilisant la notion d'holonomie on définit la suite

$$\cdots \pi_{n+1}B \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_{n+1}F \xrightarrow{\pi_n j} \pi_n E \xrightarrow{\pi_n p} \cdots$$

a) Montrer que  $\Im(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\pi_n j)$ .

b)\* Montrer l'autre inclusion, i.e.,  $\text{Ker}(\pi_n j) \subset \text{Im}(\partial_{n+1})$ .

On procède comme suit. Considérons  $[g]_* \in \pi_n(F)$  tel que  $\pi_n j([g]_*) = [c_{e_0}]_*$ , alors il existe  $G : S^n \times I \rightarrow E$  tel que

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & F \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j \\ S^n \times I & \xrightarrow{G} & E \end{array}$$

soit commutatif. Soit  $G^\# : S^n \rightarrow E^I$  l'adjoint de  $G$ . Commencer par montrer que

$$\Gamma(p^I \circ G^\#(z), e_0)(1) \in F$$

puis que

$$g \simeq \Gamma(p^I \circ G^\#(-), e_0)(1).$$

Ceci permet de conclure.

**Exercice 2.** Calculer le connectant des fibrations suivantes :

a)  $\Omega B \rightarrow P_* B \rightarrow B$

b)  $\Omega B \rightarrow \mathcal{L}B \rightarrow B$

c)  $F \rightarrow F \times B \rightarrow B$

**Exercice 3.** Montrer que

$$\pi_k S^n \cong \pi_k \mathbb{R}P^n \quad \forall k \geq 2$$

et que

$$\pi_1 \mathbb{R}P^n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall n \geq 2.$$

**Exercice 4.** Montrer que

$$\pi_k \mathbb{C}P^n \cong \pi_k S^{n+1} \quad \forall k \geq 3$$

et que

$$\pi_2 \mathbb{C}P^n = \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 2.$$

**Exercice 5.** Calculer les groupes d'homotopie de la bouteille de Klein.