Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess Hiver 07

Série 2

Exercice 1. On appelle *peigne* le sous-espace topologique X de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{\alpha \in \{0\} \cup \{2^{-n} | n \in \mathbb{N}\}} \{\alpha\} \times [0,1] \,.$$

Soit $x_0 = (0,1)$. Montrer que Id_X est homotope à l'application constante en x_0, i.e. que X est contractile, mais n'est pas homotope à l'application constante en x_0 relativement à $\{x_0\}$.

Exercice 2. On définit la *bande de Möbius* $M = [0,1] \times [0,1]/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par $(s,0) \sim (1-s,1)$. Montrer que la bande de Möbius a le même type d'homotopie que le cercle S^1.

Exercice 3. Soient X un espace topologique et $f, g, h : I \longrightarrow X$ des chemins tels que $f(1) = g(0)$ et $g(1) = h(0)$. Prouver explicitement, i.e. en donnant les formules, les relations suivantes :

a) $f * (g * h) \simeq_* (f * g) * h$

b) $c_{x_0} * f \simeq_* f \simeq_* f * c_{x_1}$.

Exercice 4. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés. Montrer que

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \,.$$

Définition 1. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On dit que X est un *H-espace* s'il existe une application continue pointée $\mu : X \times X \longrightarrow X$ telle que

$$\mu \circ \imath_1 \simeq_* Id_X \simeq_* \mu \circ i_2$$

où $i_1, i_2 : X \longrightarrow X \times X$ sont donnes par

$$i_1(x) = (x, x_0) \text{ et } i_2(x) = (x_0, x) \,.$$

Exercice 5. Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Montrer que S^1 est un H-espace.

Exercice 6. Soient (X, x_0), (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. Montrer que

$$X \text{ est un H-espace } \Longrightarrow [Y, X]_* \text{ est un groupe } \forall\, Y \,.$$