

Série 3

Exercice 1. Soient $(X, x_0), (Y, y_0)$ deux espaces topologiques pointés. Montrer que

$$[Y, X]_* \text{ est un groupe } \forall Y \implies X \text{ est un H-espace.}$$

Définition 1. Soit (G, \cdot) un groupe. On dit que G est un *groupe topologique* s'il est muni d'une topologie T telle que la multiplication

$$(x, y) \longmapsto x \cdot y$$

et le passage à l'inverse

$$x \longmapsto x^{-1}$$

soient continues.

Exercice 2. Soit G un groupe topologique et e son élément neutre.

- Soient f, g des lacets de base e . Montrer que $f \star g \simeq f \cdot g \simeq g \cdot f \simeq g \star f$. En conclure que $\Pi_1(G, e)$ est abélien.
- Déduire que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien quelque soit le point de base $g \in G$.
- Montrer que le groupe fondamental d'un H -espace est abélien.

Exercice 3. Montrer que tout groupe topologique est un H -espace.

Exercice 4. a) En utilisant les quaternions \mathbb{H} , montrer que la sphère S^3 est un groupe topologique.

b) **On a rainy day !!!**

En considérant les octaves \mathbb{O} comme des paires de quaternions $(h_1, h_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, montrer que S^7 est un groupe topologique.

Remarque 1. On aura ainsi démontré le sens facile du théorème de J. F. Adams donnant l'équivalence :

$$S^n \text{ est un H-espace } \iff n = 1, 3, 7.$$

Exercice 5. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un H -espace.

Exercice 6. Soit $\Omega_{x_0} X = \{a : I \longrightarrow X \mid a \text{ est un lacet basé en } x_0\}$, muni de la topologie de sous-espace de X^I . Montrer que $\Omega_{x_0} X$ est un H -espace.

Définition 2. Soient $(X, x_0, \mu_X), (Y, y_0, \mu_Y)$ deux H -espaces. L'application continue pointée $f : X \rightarrow Y$ est appelée H -morphisme si

$$f \circ \mu_X \simeq \mu_Y(f \times f).$$

Exercice 7. Soit $P_{x_0, x_1}X = \{b : I \rightarrow X \mid b \text{ est un chemin avec } b(0) = x_0, b(1) = x_1\}$. Pour tout $b \in P_{x_0, x_1}X$ on définit

$$\begin{aligned} b^\# : \Omega_{x_0}X &\longrightarrow \Omega_{x_1}X \\ a &\longmapsto (\bar{b} \star a) \star b. \end{aligned}$$

- a) Montrer que $b^\#$ est un H -morphisme.
- b) Montrer que pour tout chemins b tel que $b(0) = x_0, b(1) = x_1$ et c tel que $c(0) = x_1, c(1) = x_2$ on a

$$c^\# \circ b^\#(a) \simeq (b \star c)^\#(a).$$

Exercice 8. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

- a) Toute application continue $S^1 \rightarrow X$ est homotope à une application constante.
- b) Toute application continue $S^1 \rightarrow X$ peut être étendue à une application continue $D^2 \rightarrow X$.
- c) Le groupe fondamental de X est trivial.

Exercice 9. Montrer qu'un espace topologique X est simplement connexe (i.e. son groupe fondamental est trivial) ssi il existe une unique classe d'homotopie de chemins reliant deux points dans X .