Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess — Hiver 07

Série 3

Exercice 1. Soient (X, x_0), (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. Montrer que

$$[Y, X]_* \text{ est un groupe } \forall\, Y \Longrightarrow X \text{ est un H-espace}\,.$$

Définition 1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On dit que G est un *groupe topologique* s'il est muni d'une topologie T telle que la multiplication

$$(x, y) \longmapsto x \cdot y$$

et le passage à l'inverse

$$x \longmapsto x^{-1}$$

soient continues.

Exercice 2. Soit G un groupe topologique et e son élément neutre.

a) Soient f, g des lacets de base e. Montrer que $f \star g \simeq f \cdot g \simeq g \cdot f \simeq g \star f$. En conclure que $\Pi_1(G, e)$ est abélien.

b) Déduire que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien quelque soit le point de base $g \in G$.

c) Montrer que le groupe fondamental d'un H-espace est abélien.

Exercice 3. Montrer que tout groupe topologique est un H-espace.

Exercice 4. a) En utilisant les quaternions $\mathbb{H}$, montrer que la sphère S^3 est un groupe topologique.

b) **On a rainy day !!!**
En considérant les octaves $\mathbb{O}$ comme des paires de quaternions $(h_1, h_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, montrer que S^7 est un groupe topologique.

Remarque 1. On aura ainsi démontré le sens facile du théorème de J. F. Adams donnant l'équivalence :

$$S^n \text{ est un H-espace} \iff n = 1, 3, 7\,.$$

Exercice 5. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un H-espace.

Exercice 6. Soit $\Omega_{x_0} X = \{a : I \longrightarrow X \,|\, a \text{ est un lacet basé en } x_0\}$, muni de la topologie de sous-espace de X^I. Montrer que $\Omega_{x_0} X$ est un H-espace.

Définition 2. Soient $(X, x_0, \mu_X), (Y, y_0, \mu_Y)$ deux H-espaces. L'application continue pointée $f : X \longrightarrow Y$ est appelée *H-morphisme* si

$$f \circ \mu_X \simeq \mu_Y(f \times f)\,.$$

Exercice 7. Soit $P_{x_0,x_1}X = \{b : I \longrightarrow X |\, b \text{ est un chemin avec } b(0) = x_0,\, b(1) = x_1\}$. Pour tout $b \in P_{x_0,x_1}X$ on définit

$$\begin{array}{rccc} b^{\#}: & \Omega_{x_0}X & \longrightarrow & \Omega_{x_1}X \\ & a & \longmapsto & (\bar{b} \star a) \star b\,. \end{array}$$

a) Montrer que $b^{\#}$ est un H-morphisme.

b) Montrer que pour tout chemins b tel que $b(0) = x_0, b(1) = x_1$ et c tel que $c(0) = x_1, c(1) = x_2$ on a
$$c^{\#} \circ b^{\#}(a) \simeq (b \star c)^{\#}(a)\,.$$

Exercice 8. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

a) Toute application continue $S^1 \longrightarrow X$ est homotope à une application constante.

b) Toute application continue $S^1 \longrightarrow X$ peut être étendue à une application continue $D^2 \longrightarrow X$.

c) Le groupe fondamental de X est trivial.

Exercice 9. Montrer qu'un espace topologique X est simplement connexe (i.e. son groupe fondamental est trivial) ssi il existe une unique classe d'homotopie de chemins reliant deux points dans X.